Adicionales Práctica 3

1. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:
   (a) $f_n(c) = x^n$, $S = (-1, 1]$.
   (b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.
   (c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.

2. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 1(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.
   (b) Probar que la sucesión del ejercicio 1(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.

3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:
   (a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.
   (b) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo $\mathbb{R}$.
   (c) $f_n(x) = \frac{n}{n+1}x$, sobre todo $\mathbb{R}$.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:
   (a) f es acotada.
   (b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

5. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(x) = n^2 x(1 - x)^n.$$
   (a) Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.
   (b) Verificar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ pero que el límite no puede 'pasar adentro de la integral'. Es decir, ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$

6. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables definidas sobre el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a, b]$. Probar que si existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$.