Práctica 4

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

2. Hallar la suma de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

3. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

   Sugerencia: descomponer el término general en la forma

   $$\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

4. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

   $$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

5. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente?

6. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos, y si $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \to 0$ si $n \to \infty$. *Sugerencia.* $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \to 0$ si $n \to \infty$, y similarmente para na_{2n+1}.

7. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

   $$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}.$$

8. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

   (b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

9. Sea $|\alpha| < 1$. Mostrar que
$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1}.$$

10. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$	(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$.