

Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2001
RESULTADOS PRELIMINARES PARTE I.

1. Revisar los siguientes teoremas:

- (a) Teorema de convergencia monótona de Beppo-Levi.
- (b) Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
- (c) Lema de Fatou.

2. Diferenciación bajo el signo integral.

- (a) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ medible, $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in V$. Si $f(x, \cdot) \in L^1(U)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$, $f(\cdot, y)$ es diferenciable en $|x - x_0| < \varepsilon$ para casi todo $y \in U$ y existe $g \in L^1(U)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq g(y), \quad |x - x_0| < \varepsilon, \quad \text{a.e. } y \in U$$

con $1 \leq j \leq n$ fijo, entonces la función $F(x) = \int_U f(x, y) dy$ es derivable para $|x - x_0| < \varepsilon$ respecto de x_j , y $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy$

- (b) Verificar que si $f(\cdot, y)$ es una función $C^1(\overline{U})$ a.e. y , con U abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del ítem anterior.

3. (a) Sean f, g derivables, h continua. Derivar

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s) ds$$

- (b) Sean f, g derivables, $h = h(x, s)$ continua y derivable respecto de x , $\frac{\partial h}{\partial x}$ acotada. Derivar

$$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s) ds$$

4. (a) Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

(b) Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(c) Desigualdad integral de Minkowsky: Si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left[\int \left| \int f(x, y) dx \right|^p dy \right]^{1/p} \leq \int \left[\int |f(x, y)|^p dy \right]^{1/p} dx.$$

5. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{-h}f(x) \equiv f(x + h)$.

(a) Para $1 \leq p < \infty$, $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_{-h}f - f\|_p = 0$. (Pista: usar que $C_0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p < \infty$).

(b) Mostrar que (a) no vale para $p = \infty$.

6. Desigualdad de Young.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

7. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ y además $f * g$ es uniformemente continua.

8. Sean $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$), $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$, $|\alpha| \leq k$.

9. (a) Sea

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Probar que $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Construir $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{sop}(\rho) \subset B(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

10. Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \rho = 1$, y $\forall \varepsilon > 0$, sea $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$. Probar que

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, f uniformemente continua en $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\sup_{x \in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$, $\forall V'$ compacto, $V' \subset V$.

- (c) Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.
- (d) Si además $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- (e) Calcular $f * \rho_\varepsilon$ si $f = \chi_{[a,b]}$ y ρ es la función del ejercicio 9 (a).
11. Demostrar que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$).
- Pista: las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$).
12. Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$.
- Si $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ y $\int_\Omega f \varphi = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.
13. Si $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ y $\int f \varphi' = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f = \text{cte}$ c.t.p.
- Pista: tomar $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int g = 1$ y para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$ es la derivada de una función $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Definición: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Diremos que Ω es un dominio con frontera C^r si para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno U de x_0 , un entorno $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y una función $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r tal que (salvo un reordenamiento de las variables) el dominio se describe como sigue:

$$\Omega \cap U = \{x \in U : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V; x_n > \phi(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

$$\partial\Omega \cap U = \{x \in U : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V; x_n = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

14. Fórmulas de Green

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ con frontera C^1

- (a) si $\vec{V} = \vec{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))$, $v_i \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{V}(x) dx = \int_\Omega \text{div } \vec{V}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V}(x) \cdot \nu(x) dS_x$$

donde $\nu = \nu(x)$ es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$.

(b) si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x$$

$$\text{donde } \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$$

15. Revisar los siguientes teoremas:

- (a) Teorema de la Función Inversa.
- (b) Teorema de la Función Implícita.
- (c) Teorema de Arzelá-Ascoli.
- (d) Teorema de la Partición de la Unidad.