

1 Espacios de Banach:

Sea X un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Definición 1.1 Una función $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ se dice una norma si

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 1.2 Una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge a $x \in X$ (y se nota $x_k \rightarrow x$) si $\|x_k - x\| \rightarrow 0$.

Definición 1.3 Una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 > 0$ tal que

$$\|x_k - x_l\| < \varepsilon \quad \text{para todo } k, l \geq k_0.$$

Probar que si $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente, entonces es de Cauchy.

Definición 1.4 X se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir si para toda $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ de Cauchy, existe $x \in X$ tal que $x_k \rightarrow x$. Un espacio vectorial normado completo se dice un espacio de Banach.

Ejemplo 1.1 (Espacios L^p). Sea U un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$, y $1 \leq p \leq \infty$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, definimos

$$\|f\|_{L^p(U)} = \begin{cases} (\int_U |f|^p dx)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_U |f| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Definimos $L^p(U)$ como el espacio lineal de todas aquellas funciones f para las cuales $\|f\|_{L^p(U)} < \infty$. Probar que $L^p(U)$ es un espacio de Banach si identificamos aquellas funciones que coinciden en casi todo punto.

Ejemplo 1.2 (Espacios C^k). Sea U un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $k \in \mathbb{N}_0$. Para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \text{ Si } x \in \mathbb{R}^n, \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ y } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x)^\alpha}$$

Definimos luego el conjunto

$$C^k(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} / D^\alpha f \text{ es continua en } \overline{U}, \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}$$

Probar que $C^k(U)$ es un espacio de Banach si lo dotamos de la norma

$$\|f\|_{C^k(U)} = \|f\|_{k,U} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)}$$

Ejemplo 1.3 (Espacios de Hölder). Sea U un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $0 < \alpha \leq 1$. Definimos el siguiente conjunto

$$C^\alpha(U) = \left\{ f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas} / \sup_{x,y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty \right\}$$

Probar que $C^\alpha(U)$ es un espacio de Banach si lo dotamos de la norma

$$\|f\|_{C^\alpha(U)} = \|f\|_{\alpha,U} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup_{x,y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Si $\alpha = 1$ el espacio se llama Lipschitz. ¿Qué pasa si $\alpha > 1$?

2 Espacios de Hilbert:

Sea H un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Definición 2.1 Una función $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ se dice un producto interno si

1. $(x, y) = (y, x)$ para todo $x, y \in H$.
2. $x \mapsto (x, y)$ es lineal para cada $y \in H$.
3. $(x, x) \geq 0$ para todo $x \in H$.

4. $(x, x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 2.2 Si $(\cdot, \cdot)$ es un producto interno, la norma asociada es

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} \quad (x \in H).$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz dice

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (x, y \in H).$$

Probar C-S y verificar que $\|\cdot\|$ define, efectivamente, una norma.

Definición 2.3 Un espacio de Hilbert H es un espacio de Banach cuya norma es obtenida por un producto interno.

Ejemplo 2.1 Probar que el espacio $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert, donde

$$(f, g) = \int_U fg \, dx \quad (f, g \in L^2(U)).$$

Definición 2.4 Sea H un espacio de Hilbert separable.

1. Dos elementos $x, y \in H$ son ortogonales si $(x, y) = 0$.
2. Una sucesión $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ se dice un sistema ortonormal si

$$(w_k, w_l) = 0 \quad k \neq l, \quad \|w_k\| = 1.$$

3. Un sistema ortonormal $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ se dice una base ortonormal, si dado $x \in H$ existen $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k.$$

En ese caso se verifica que $\alpha_k = (x, w_k)$.

Proposición 2.1 Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ un sistema ortonormal. Son equivalentes:

1. $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ es una base ortonormal.
2. Si $(x, w_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.

3. El subespacio generado por $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en H .

4. Para todo $x \in H$, se verifica la igualdad de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k)^2.$$

Probar que en general vale la desigualdad de Bessel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Ejemplo 2.2 Sea $H = L^2([0, 2\pi])$ probar que la sucesión

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

es un sistema ortonormal

Teorema 2.1 (No trivial) La sucesión

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

es una base ortonormal de $L^2([0, 2\pi])$.

Definición 2.5 Si S es un subespacio de H , $S^\perp = \{x \in H / (x, y) = 0 \text{ para todo } y \in S\}$ es el complemento ortogonal de S . Probar que si S es cerrado, entonces $H = S \oplus S^\perp$. Probar que $S^\perp$ es cerrado.

3 Operadores Acotados:

Sean X, Y espacios de Banach (sobre $\mathbb{R}$).

Definición 3.1 1. Una función $A : X \rightarrow Y$ es un operador lineal si $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$, para todo $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Un operador lineal $A : X \rightarrow Y$ es acotado si

$$\|A\| \equiv \sup\{\|Ax\|_Y, \text{ con } \|x\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Probar que un operador lineal es acotado si y sólo si es continuo.

Definición 3.2 Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. Diremos que A es compacto si $\overline{A(B_X(0,1))}$ es compacto en Y . Probar que A es compacto si y sólo si para toda sucesión acotada en X , $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ se cumple que $\{Ax_k\}_{k=1}^\infty$ tiene una subsucesión convergente en Y .

Ejemplo 3.1 Sea U un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ y tomamos la inclusión $i : C^1(U) \rightarrow C^0(U)$ ($i(f) = f$). Probar que i es un operador compacto. (Es decir dada una sucesión acotada en C^1 existe una subsucesión que converge en C^0 .)

Definición 3.3 Sea $A : X \rightarrow X$ un operador acotado.

1. El conjunto resolvente de A es

$$\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} / (A - \eta I) \text{ es biyectivo}\}.$$

2. El espectro de A es $\sigma(A) = \mathbb{R} - \rho(A)$.

Si $\eta \in \rho(A)$, la inversa $(A - \eta I)^{-1} : X \rightarrow X$ es un operador acotado.

Definición 3.4 1. Decimos que $\lambda \in \sigma(A)$ es un autovalor de A si $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Escribimos $\sigma_p(A)$ para denotar el conjunto de los autovalores de A ; $\sigma_p(A)$ es el espectro puntual.

2. Si λ es un autovalor y $w \neq 0$ satisface $Aw = \lambda w$, decimos que w es un autovector asociado.

Definición 3.5 1. Un operador acotado $x' : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice una funcional acotada sobre X .

2. Notamos X' el conjunto de todas las funcionales acotadas sobre X .

X' es el espacio dual de X . Probar que resulta ser un espacio de Banach.

Definición 3.6 Sea $J : X \rightarrow X'' = (X')'$ dada por $J(x)(\phi) = \phi(x)$. J se denomina la inclusión canónica de X en X'' . Probar que J es una isometría.

X se dice reflexivo si J es un isomorfismo. (con lo cual $X = X''$).

Teorema 3.1 (*Teorema de representación de Riesz*)

Sea H un espacio de Hilbert y sea $x' \in H'$. Existe entonces un único $x \in H$ tal que

$$x'(y) = (x, y) \text{ para todo } y \in H.$$

El mapa $x' \mapsto x$ es un isomorfismo lineal entre H' y H .

Definición 3.7 1. Sea $A : H \rightarrow H$ un operador acotado. Su adjunto $A' : H \rightarrow H$ se define como el único operador que verifica $(y, Ax) = (A'y, x)$ para todo $x, y \in H$.

2. A se dice simétrico si $A = A'$.

Teorema 3.2 Sea $A : H \rightarrow H$ un operador compacto y simétrico. Entonces el espectro de A es finito o bien es una sucesión que tiende a 0 y el espectro puntual $\sigma_p(A)$ coincide con el espectro $\sigma(A)$, i.e. todo elemento del espectro es un autovalor.

4 Convergencia débil:

Sea H un espacio de Hilbert separable.

Definición 4.1 Decimos que una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ converge débil a $x \in H$ y se nota $x_k \rightharpoonup x$, si $(x_k, y) \rightarrow (x, y)$ para todo $y \in H$.

Probar que si $x_k \rightarrow x$ entonces $x_k \rightharpoonup x$. Es también cierto que toda sucesión débilmente convergente es acotada.

Teorema 4.1 Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{x_k\}_{k=1}^\infty$ y $x \in H$ tal que $x_{k_j} \rightharpoonup x$.