Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2001

ECUACIONES ORDINARIAS

1. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\frac{du}{dt} = \frac{1+t}{1-u}$

   (b) $\frac{du}{dt} = t \exp u$

   (c) $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t}$

   (d) $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t} + \left(\frac{u}{t}\right)^2$

   (e) $\frac{du}{dt} = t^2 \sin u$

   (f) $\frac{du}{dt} = \sqrt{t+u} - 1$

   (g) $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{t} + u^{1/2}$

   (h) $\frac{du}{dt} = \frac{t^2}{u}$

   (i) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 + 2u_2 \\ \\ \frac{du_2}{dt} = 3u_1 + 2u_2 \end{cases}$

   (j) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 - u_2 \\ \\ \frac{du_2}{dt} = u_1 + u_2 \end{cases}$

2. *Lema de Gronwall.* Sean u y v funciones continuas no negativas en $[a, b]$ tales que, para $\alpha \geq 0$, satisfacen

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(\tau) v(\tau) \, d\tau, \quad t \in [a, b].$$

   Probar que

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau) \, d\tau.$$

   En particular si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$.

3. (a) Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad t_0 < t < t_1 \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

   donde f es continua y $u \in C[t_0, t_1] \cap C^1(t_0, t_1)$, es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) \, d\tau.$$

   (b) Mostrar que si f es Lipschitz en la segunda variable y $t_1 - t_0$ es suficientemente pequeño, la ecuación integral de (i) tiene un único punto fijo.

4. (a) Probar que el problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 1 + u^2 \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Estudiar la unicidad del problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^{1/3} \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

5. Probar que la ecuación de orden n

$$\begin{cases} u^{(n)} = f\left(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right) \\ \\ u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u_1, \ldots\ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

es equivalente al sistema de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = v_{i+1} \qquad i = 1, \ldots, n-1 \\ \\ \frac{dv_n}{dt} = f(t, v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ \\ v_1(t_0) = u_0, \ldots\ldots, v_n(t_0) = u_{n-1}. \end{cases}$$

6. Sea $f(t, u)$ definida en el abierto $\Omega \subset I\!R \times I\!R^n$ con valores en $I\!R^n$ continua en (t, u) y lipschitziana en u con constante K,

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = f(t, u_i) \\ \\ u_i(t_0) = x_i \ , i = 0, 1 \end{cases}$$

Probar que para cada t donde esten definidas u_i, $i = 0, 1$, se cumple

$$|u_0(t) - u_1(t)| \leq \exp\left(K\,|t - t_0|\right)|x_0 - x_1|$$

7. Sea f definida en $\Omega \subset I\!R \times I\!R$, tal que f y $\frac{\partial f}{\partial u}$ son continuas en Ω. Sea $u = u(t, t_0, x_0)$ la solución de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Probar que u es una función C^1 de las variables (t_0, x_0).