

Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2001

ECUACIÓN DE ONDAS

1. Resolver por el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L, \end{cases}$$

donde A y B son constantes, reduciendo el problema a uno con condiciones homogéneas.

2. Resolver por el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L. \end{cases}$$

3. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la fórmula de D'Alembert.

4. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x, t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. (a) Hallar una solución general de la siguiente ecuación de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

(Sugerencia: tomar $x = x(t)$ y calcular u' .)

- (b) Verificar que la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

puede “factorizarse” de la siguiente manera

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

- (c) Combinar (a) y (b) para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

6. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x > 0, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

7. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0.$$

8. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) (\phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t)) dx dt = 0$$

para toda $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$.

- (a) Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
- (b) Mostrar que las funciones discontinuas

$$u_1(x, t) = H(x - t), \quad u_2(x, t) = H(x + t)$$

donde H es la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

9. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x, t) = w(|x|, t)$ $x \in \mathbb{R}^3$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x, t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|}.$$

10. Sea u la solución clásica de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u = f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u_t = g & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Probar que si f y g son radiales entonces u es radial.