Funciones Armonicas

1- Formulas de Green:

Recordamos que una función u se dice armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0 \quad (n \geqslant 2)$

Teorema de la divergencia

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado tal que $\partial\Omega$ es una superficie suave

$F:\Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial tal que $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, d\tau = \int_{\partial\Omega} F.n \, d\sigma$$

donde n = normal exterior de norma 1

$d\sigma$ = diferencial de superficie

$d\tau$ = diferencial de volumen

[F.n es un producto escalar $\Rightarrow$ es la componente de F normal a $\partial\Omega$]

Primera formula de Green

Si $u,v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla v + u.\Delta v \, d\tau = \int_{\partial\Omega} u.\frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$$

Aquí $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ = derivada de v en la dirección de la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$ (derivada normal)

Dem: Aplicamos el teorema de la divergencia al campo $F = u.\text{grad}(v) = u \, \nabla v$

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u.\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \nabla u.\nabla v + u.\Delta v$$

y el producto escalar $\nabla v.n$ es la derivada direccional $\dfrac{\partial v}{\partial n}$

por lo tanto:

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla v + u.\Delta v \, d\tau = \int_{\partial\Omega} u.\frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$$

Corolario: Si v es armónica en $\Omega \Rightarrow \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma = 0$

Dem: Se aplica el resultado anterior con $u \equiv 1$

Esto implica que el problema de Neumman para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

sólo puede tener solución si $\int_{\partial\Omega} f = 0$

<u>Segunda formula de Green:</u> Si $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega (u\ \Delta v - v\ \Delta u)\, d\tau = \int_{\partial\Omega} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

<u>Dem:</u> Por la primera fórmula de Green $\int_\Omega \nabla u\ \nabla v + u.\Delta v\, d\tau = \int_{\partial\Omega} u.\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma$

intercambiando los roles de u y v: $\int_\Omega \nabla u\ \nabla v + v.\Delta u\, d\tau = \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma$

Restando de la primera la segunda se obtiene la fórmula buscada.

<u>2- El potencial Newtoniano:</u>

Buscamos las funciones armónicas u de la forma $u = f(\| x \|)$ donde $f:\mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(\| x \|).\ \frac{\partial}{\partial x_i} (\| x \|) = f'(\| x \|)\ \frac{x_i}{\| x \|}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i} = f''(\| x \|)\ \frac{x_i^2}{\| x \|^2} + f'(\| x \|).\ \frac{1}{\| x \|} + f'(\| x \|)\ \frac{x_i^2}{\| x \|^3}$$

por lo tanto

$$\Delta u = f''(\| x \|) + f'(\| x \|).\ \frac{n-1}{\| x \|}$$

Por lo tanto encontramos para f la ecuación diferencial:

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0$$

Llamemos $g = f'$ tenemos

$$g'(r) + \frac{n-1}{r} g(r) = 0$$

dividiendo por g: $\dfrac{g'(r)}{g(r)} = -\dfrac{n-1}{r}$

e integrando $\qquad \log g = (n-1) \int \frac{-1}{r} + k \quad (k = \text{constante})$

$$\log g = -(n-1) \log r + k \Rightarrow g = \frac{k}{r^{n-1}} \quad (k \text{ otra constante})$$

$$f = \begin{cases} k.\log r & \text{si } n = 2 \\ k \cdot \frac{1}{r^{n-2}} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

<u>Conclusion:</u> La función $N(x) = \begin{cases} k \log r & \text{si } n = 2 \\ \frac{k}{r^{n-2}} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$ con $r = \| x \|$

(k constante) es armónica en $\mathbb{R}^n - \{0\}$

<u>Obs:</u> Si $F(x) = \text{grad } N(x) = \text{grad } f(\| x\|) = f'(\| x \|).\text{grad}(\| x \|) =$

$$= k \frac{1}{\| x \|^{n-1}} \frac{x}{\| x \|} = k \frac{x}{\| x \|^n}$$

este campo se llama campo Newtoniano.

Para $n = 3$ $F = k \dfrac{x}{\| x \|^3}$ es el campo creado en el punto x por una carga colocada en el origen.

<u>Obs:</u> Si definimos $N_y(x) = N(x-y)$ entonces N_y es armónica en $\mathbb{R}^n - \{y\}$

N_y es el potencial Newtoniano centrado en y

Entonces $\text{grad } N_y(x) = k \dfrac{x - y}{\| x - y \|^n}$

<u>3- El teorema del valor medio:</u>

<u>Notaciones:</u>

$* \; B_r(x) = \{ z \in \mathbb{R}^n : \| x - z \| \leqslant r \}$

es la bola abierta de centro x y radio r

$* \; \overline{B_r(x)} = \{ z \in \mathbb{R}^n : \| x - z \| \leqslant r \}$

es la bola cerrada de centro x y radio r

$* \; S_r(x) = \{ z \in \mathbb{R}^n : \| x - z \| = r \}$

es la esfera de centro x y radio r

Teorema: Supongamos que u es armónica en Ω

Si $x \in \Omega$ y $r > 0$ es tal que $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega \Rightarrow$

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1} w_n} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{w_n} \int_{S_1(x)} u(x+ry)\, d\sigma(y)$$

donde $d\sigma(y)$ significa diferencial de superficie

y w_n = área de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$

Obs: Este teorema significa que el valor de una función armónica en el centro de una esfera es el promedio de sus valores en la cáscara.

Dem: En la segunda fórmula de Green tomo u la del enunciado

y $v = N_x$ (el potencial Newtoniano centrado en x) eligiendo k = 1

$\Omega = B_r(x) - \overline{B_\varepsilon(x)}$ con $0 < \varepsilon < r$

(Ω es una "corona" o sea la región entre dos esferas)

En este abierto Ω u y v son armónicas ($x \notin \Omega$)

por lo tanto resulta: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0$

$\partial\Omega$ se compone de $S_r(x)$ y $S_\varepsilon(x)$ [dos cáscaras de esferas concéntricas]

$$\int_{S_r(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \int_{S_\varepsilon(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0 \qquad (1)$$

* Para calcular la integral sobre $S_r(x)$ notamos que v es constante en $S_r(x)$ y vale r^{n-2} si $n > 2$ (o log r si $n = 2$)

La normal exterior unitaria es $n = \dfrac{y - x}{\| y - x \|}$ en un punto $y \in S_r(x)$

por lo tanto

$$\frac{\partial v}{\partial n} = < \text{grad } v,\ n > = < \frac{y - x}{\| y - x \|^n} , \frac{y - x}{\| y - x \|} > = \frac{1}{\| y - x \|^{n-1}} = \frac{1}{r^{n-1}}$$

por lo tanto tenemos:

$$\int_{S_r(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u\, d\sigma - r^{n-2} \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma$$

si $n > 2$ y

$$\int_{S_r(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u \, d\sigma - \log r \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

si $n = 2$

Ahora como u es armónica $\Rightarrow \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$

(corolario de la primera fórmula de Green)

De modo que en cualquier caso:

$$\int_{S_r(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u \, d\sigma \qquad (2)$$

* Análogamente obtenemos una expresión para la integral sobre $S_\varepsilon(x)$

esta vez la normal exterior es $n = - \frac{y - x}{\| y - x \|}$ en un punto $y \in S_\varepsilon(x)$

de modo que:

$$\int_{S_\varepsilon(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u \, d\sigma - \varepsilon^{n-2} \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

$(n > 2)$ y

$$\int_{S_\varepsilon(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u \, d\sigma - \log \varepsilon \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

nuevamente la integral $\int_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ se anula por ser u armónica

y tenemos: $$\int_{S_\varepsilon(x)} \left(u.\frac{\partial v}{\partial n} - v.\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u \, d\sigma \qquad (3)$$

de (1) , (2) y (3) resulta que:

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u \, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u \, d\sigma \qquad (4)$$

(esto significa que el valor de la integral en realidad no depende del radio de la esfera!)

Notemos que el área de la esfera $S_\varepsilon(x)$ es $\varepsilon^{n-1} w_n$ donde w_n es el área de la esfera unidad por lo tanto $\frac{1}{w_n \, \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u \, d\sigma$ es el promedio de u en $S_\varepsilon(x)$

Dividimos ambos miembros de (4) por w_n

$$\frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u \, d\sigma = \frac{1}{w_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u \, d\sigma$$

Si hacemos que $\varepsilon \to 0$ tendremos que $\displaystyle\frac{1}{w_n \, \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u \, d\sigma \to u(x)$

por ser u continua (se usa el teorema del valor medio para integrales múltiples) por lo tanto:

$$u(x) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u(y) \, d\sigma(y)$$

como afirma el teorema.

Para obtener la segunda igualdad del teorema hacemos el cambio de variable $y = x + r.z$ con $z \in S_1(0)$

$$u(x) = \frac{1}{w_n} \int_{S_r(0)} u(x + r.z) \, d\sigma(z)$$

<u>Corolario:</u> Supongamos que u es armónica en Ω

Si $x \in \Omega$ y $r > 0$ es tal que $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega \Rightarrow$

$$u(x) = \frac{n}{r^n w_n} \int_{\overline{B_r(x)}} u(y) \, dy = \frac{n}{w_n} \int_{\overline{B_1(0)}} u(x + r.z) \, dz$$

<u>Dem:</u> Calculo la integral usando coordenadas polares:

escribo $y = x + \rho.t$ con $0 \leqslant \rho \leqslant r$ y $t \in S_1(0)$

$$I = \int_{\overline{B_r(x)}} u(y) \, dy = \int_0^r \rho^{n-1} \left[\int_{S_1(0)} u(x + \rho.t) \, d\sigma(t) \right] d\rho$$

[ρ^{n-1} proviene del jacobiano)

por el teorema del valor medio $\displaystyle\int_{S_1(0)} u(x + \rho.t) \, d\sigma(t) = w_n \, u(x)$

$$I = u(x) \, w_n \int_0^r \rho^{n-1} \, d\rho = u(x) \, w_n \frac{r^n}{n} \text{ por lo tanto:}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{w_n \, r^n} \int_{\overline{B_r(x)}} u(y) \, dy = u(x)$$

la segunda igualdad se obtiene del cambio de variable

$y = x + r.z$ con $z \in S_1(0)$

Obs: Podemos escribir esto como $u(x) = \dfrac{1}{|B_r(x)|} \displaystyle\int_{\overline{B_r(x)}} u(y)\, dy$

[tenemos $v_n = \dfrac{w_n}{n}$ = volumen de la esfera unidad]

Para verlo basta tomar $u \equiv 1$

4- El reciproco del teorema del valor medio:

La razón por la que el teorema del valor medio es muy importante, es que también es cierto el recíproco:

Teorema: (recíproca del teorema del valor medio)

Sea u continua en Ω tal que si $x \in \Omega$ y $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$ entonces

$u(x) = \dfrac{1}{w_n} \displaystyle\int_{S_1(x)} u(x+ry)\, d\sigma(y)$ (o sea u verifica el teorema del valor medio)

entonces $u \in C^{\infty}(\Omega)$ y $\Delta u = 0$

Dem: elijamos $\psi \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $sop(\varphi) \subseteq (-1,1)$ y $\varphi(x)$ es constante en un entorno del cero.

Pongamos $\varphi(x) = \psi(\| x \|) \Rightarrow \psi$ es C^{∞}

(para $x \neq 0$ por ser composición de C^{∞} y en 0 por ser localmente constante)

(multiplicando sino ψ por una constante) podemos suponer

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \int_{\overline{B_1(0)}} \varphi(x)\, dx = 1)$

dado $\varepsilon > 0$ definimos $\phi_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n}\, \phi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ (aproximación de la identidad)

claramente $sop(\phi_{\varepsilon}) \subseteq B_{\varepsilon}(0)$

(si $|x| \geqslant \varepsilon \Rightarrow |x/\varepsilon| \geqslant 1 \Rightarrow \phi$ se anula en un entorno de $x/\varepsilon \Rightarrow \phi_{\varepsilon}$ se anula en un entorno de x)

pongamos $\Omega_{\varepsilon} = \{ x \in \Omega : d(x,\Omega^c) > \varepsilon \}$

como $d(x,\Omega^c)$ es una función continua $\Rightarrow \Omega_{\varepsilon}$ es abierto

Además como Ω es abierto $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega_{\varepsilon} = \Omega$

Luego para ver que u es C^{∞} basta ver que lo es en cada Ω_{ε}

Sea $x \in \Omega_\varepsilon$ .Calculemos

$$(u * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\ \phi_\varepsilon(x-y)\ dy$$

notemos que si $|x-y| > \varepsilon \Rightarrow \phi_\varepsilon(x-y) = 0$ por lo tanto podemos integrar igualmente sobre la bola $\overline{B_\varepsilon(x)}$

$$(u * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{\overline{B_\varepsilon(x)}} u(y)\ \phi_\varepsilon(x-y)\ dy$$

como dicha bola es un compacto y tanto u como φ son continuas $\Rightarrow$ la integral existe

Hagamos el cambio de variable $t = x-y \Rightarrow y = x-t$ (el jacobiano es 1)

$$(u * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{\overline{B_\varepsilon(0)}} u(x-t)\ \phi_\varepsilon(t)\ dt$$

$$= \int_{\overline{B_\varepsilon(0)}} u(x-t)\ \varepsilon^{-n}\ \phi\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dt$$

hagamos el cambio de variable $z = \dfrac{x}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon^n\ dz = dt$

$$= \int_{\overline{B_1(0)}} u(x-\varepsilon z)\ \ \phi(z)\ dz$$

esta integral la calculamos usando coordenadas polares:

$$= \int_0^1 \left[\int_{S^1(0)} u(x-\varepsilon z)\ d\sigma(z) \right] \psi(r)\ r^{n-1}\ dr$$

usando la hipótesis tenemos que

$$(u * \phi_\varepsilon)(x) = \int_0^1 w_n\ u(x)\ \psi(r)\ r^{n-1}\ dr = u(x)\ w_n \int_0^1 \psi(r)\ r^{n-1}\ dr$$

usando coordenadas polares tenemos que por como elegimos φ:

$$1 = \int_{\overline{B_1(0)}} \varphi(x)\ dx = \int_0^1 \int_{S^1} \varphi(r.y)\ r^{n-1}\ dr\ d\sigma(y)$$

$$= w_n \int_0^1 \psi(r)\ r^{n-1}\ dr$$

con lo que queda $(u * \phi_\varepsilon)(x) = u(x)\ \forall\ x \in \Omega_\varepsilon$

Ahora ϕ_ε es C^∞ de soporte compacto $\Rightarrow u * \phi_\varepsilon$ es $C^\infty \Rightarrow$ u es C^∞ en Ω_ε (para cada ε) $\Rightarrow$ u es C^∞ en Ω

Veamos ahora que $\Delta u = 0$

Sea $x \in \Omega$ y tomemos $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$

$$\int_{\overline{B_r(x)}} \Delta u(y)\, dy = \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(s)\, d\sigma(s) \quad \text{(por la primera fórmula de green)} =$$

$$= \int_{S_1(0)} r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial n} (x+rz)\, dz$$

<u>Obs:</u> interpretación en términos de geometría diferencial

se tiene $\psi:S_1(0) \to S_r(x)$ dada por $\psi(z) = x + rz$ es un difeomorfismo

tomemos σ la forma de volumen en $S_r(x)$

$(\psi^*\sigma)_z \ (X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}) = \sigma_{\psi(z)}(d_z\psi(X_1),d_z\psi(X_2),\ldots\ldots,d_z\psi(X_r)) =$

$= \sigma_{x+\rho z} \ (\rho.X_1,\rho.X_2,\ldots,\rho.X_{n-1}) = \omega \ (\rho.X_1,\rho.X_2,\ldots,\rho.X_{n-1},z)$

[ω la n-forma de volumen en $\mathbb{R}^n$; z es la normal exterior unitaria a $S_r(x)$]

$= \rho^{n-1} \ \omega(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1},z) = \rho^{n-1} \ \tilde{\sigma}(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})$

donde $\tilde{\sigma}$ es la forma de volumen en $S_1(0)$

Luego si $f:S_r(x) \to \mathbb{R}$ se verifica

$$\int_{S_r(x)} f(y)\, d\sigma(y) = \int_{S_1(0)} r^{n-1} f(x+rz)\, d\tilde{\sigma}(z)$$

en particular $\text{area}(S_r(x)) = r^{n-1}\ \text{area}(S_1(0))$

En $s \in S_r(x)$ la normal exterior unitaria es $n(s) = \dfrac{s - x}{r} = z$

Por definición de derivada direccional encontramos que:

$$\frac{\partial u}{\partial n} (s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(s+\varepsilon n) - u(s)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x+rz+\varepsilon z) - u(x+rz)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho} \Big[u(x+\rho z) \Big]_{\rho = r}$$

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = \int_{S_1(0)} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \Big[u(x+\rho z) \Big]_{\rho = r} dz =$$

Sacando la derivada a fuera de la integral encontramos que:

$$= r^{n-1} \frac{d}{d\rho} \left[\int_{S_1(0)} u(x+\rho z)\, dz \right] = r^{n-1} \frac{d}{d\rho} \left[w_n\, u(x) \right] = 0$$

ya que w_n por $u(x) = 0$

de modo que $\forall\ r > 0$ $\displaystyle\int_{\overline{B_r(x)}} \Delta u(y)\, dy = 0$

como Δu es continua (pues u es C^∞)

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = 0$$

esto muestra que $\Delta u = 0$ en Ω

<u>Corolario 1:</u> Si u es armónica en Ω $\Rightarrow$ u es C^∞

<u>Dem:</u> u es armónica $\Rightarrow$ u verifica el teorema del valor medio $\Rightarrow$ u es C^∞

<u>Corolario 2:</u> Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones armónicas en Ω tal que $u_k \to u$ uniformemente sobre todo compacto $K \subseteq \Omega \Rightarrow$ u es armónica en Ω

<u>Dem:</u> Como u_k es armónica en $\Omega \Rightarrow$ verifica el teorema del valor medio

$$u_k(x) = \frac{1}{r^{n-1}\, w_n} \int_{S_r(x)} u_k(y)\, d\sigma(y)$$

cada vez que $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$

Pero $S_r(x) \subseteq \Omega$ es un compacto $\Rightarrow u_k \to u$ uniformemente en $S_r(x)$

luego haciendo que $k \to \infty$ se obtiene

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\, w_n} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y)$$

pero entonces u verifica el teorema del valor medio, y por consiguiente es armónica en Ω

<u>5- Principio del maximo: unicidad</u>

<u>Teorema:</u> (Principio del maximo) Supongamos que Ω es un abierto <u>conexo</u> pero no necesariamente acotado

Si $u:\Omega \to \mathbb{R}$ es armónica y $\displaystyle\sup_{x \in \Omega} u(x) = A < +\infty$ (u es acotada sup. en Ω)

$\Rightarrow u \equiv A$ en Ω ,o bien $u(x) < A \ \forall \ x \in \Omega$

(si Ω es acotado y u es continua en $\overline{\Omega}$ el máximo de u en $\overline{\Omega}$ se alcanza en el borde)

<u>Dem:</u> Sea $M = \{ x \in \Omega : u(x) < A \}$

Claramente u es abierto (por ser u continua)

Veamos que es cerrado en Ω :Sea $x \in \overline{M}$

Tomemos una bola $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega \Rightarrow$ existe un n_o tal que si $n \geqslant n_o$ $x_n \in \overline{B_r(x)}$

$$u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{\overline{B_r(x)}} u(y)\, dy \quad (*)$$

Como $x \in \overline{M} \Rightarrow$ existe un $y_o \in M \cap \overline{B_r(x)}$ $u(y_o) < A$

En un entorno de A será (por continuidad) $u(y_o) \leqslant A - \varepsilon$

con lo que por $(*)$ será $u(x) < A \Rightarrow x \in M$

Siendo Ω conexo y M abierto y cerrado en $\Omega \Rightarrow M = \Omega$ (o sea $u(x) < A \ \forall x \in \Omega$)

o bien $M = \emptyset$ $(u \equiv A)$

Obviamente se deduce: (aplicando el teorema a $-u$)

<u>Corolario:</u> (Principio del maximo) Supongamos que Ω es un abierto <u>conexo</u> pero no necesariamente acotado

Si $u:\Omega \to \mathbb{R}$ es armónica y $\inf_{x \in \Omega} u(x) = A > -\infty$ (u es acotada inf. en Ω)

$\Rightarrow u \equiv A$ en Ω ,o bien $u(x) > A \ \forall \ x \in \Omega$

<u>Teoremas</u> <u>de</u> <u>unicidad:</u>

<u>Teorema:</u> Sea Ω un abierto acotado y conexo

Si u_1, u_2 son armónicas en Ω ,continuas en $\overline{\Omega}$ y $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ en Ω

Esto significa que el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = g \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene a lo sumo una solución

<u>Dem:</u> sea $u = u_1 - u_2 \Rightarrow \Delta u = 0$ y $u = 0$ en $\partial\Omega \Rightarrow u \leqslant 0$ (pues el máximo de v se alcanza en el borde) y $u \geqslant 0$ (pues el mínimo también se alcanza

en el borde) $\Rightarrow u = 0$

Otra demostración diferente se basa en la fórmula de energía:
en la primera fórmula de Green tomemos $v = u$

$$\int_{\Omega} \| \nabla u \|^2 + u.\Delta u \, d\tau = \int_{\partial\Omega} u.\frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$$

entonces si $\Delta u = 0$ y o bien $u = 0$ (o bien $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$) en $\partial\Omega$

queda $\int_{\Omega} \| \nabla u \|^2 = 0 \Rightarrow \nabla u = 0$ en $\Omega \Rightarrow u = cte$ en Ω

Si $u = 0$ en $\partial\Omega$ se tiene $u = 0$ en Ω (esto prueba la unicidad para el problema de Dirichlet)
Sin embargo también se obtiene:

<u>Teorema:</u>Si Ω es un abierto acotado con frontera suave y $u_1, u_2 \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ son armónicas tales que $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$ en $\partial\Omega$
$\Rightarrow u_1 - u_2$ difieren en una constante.

En otras palabras: dos soluciones del problema de Neumman:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

difieren en una constante.

<u>6- Teorema de Liouville</u>

<u>Teorema de Liouville:</u> Si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y acotada $\Rightarrow$ u es constante

<u>Dem:</u> Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > \| x \|$
aplicando el teorema del valor medio encontramos que

$$|u(x) - u(0)| = \frac{1}{r^n v_n} \left| \int_{\overline{B_r(x)}} u(y)\, dy - \int_{\overline{B_r(0)}} u(y)\, dy \right|$$

$$= \frac{n}{r^n v_n} \left[\int_{\overline{B_r(x) - B_r(0)}} |u(y)|\, dy - \int_{\overline{B_r(0) - B_r(x)}} |u(y)|\, dy \right]$$

(notamos A − B a la diferencia de conjuntos)

$$\leqslant \frac{1}{r^n v_n} \| u \|_\infty \left[|\overline{B_r(x)} - \overline{B_r(0)}| + |\overline{B_r(0)} - \overline{B_r(x)}| \right]$$

$$\overline{B_r(0)} - \overline{B_r(x)} = \{ y \in \mathbb{R}^n : \| y \| \leqslant r \; \| x - y \| > r \} \subseteq$$

$$\{ y \in \mathbb{R}^n : \| y \| \leqslant r \, , \; \| x \| + \| y \| > r \} =$$
$$= \{ y \in \mathbb{R}^n : r - \| x \| \leqslant \| y \| \leqslant r \}$$
(pues $\| x - y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$)

de donde: $|B_r(0) - B_r(x)| \leqslant v_n \left(r^n - (r - \| x \|)^n \right)$

$$\overline{B_r(x)} - \overline{B_r(0)} = \{ y \in \mathbb{R}^n : \| y - x \| \leqslant r \, , \; \| y \| > r \}$$

$$\leqslant \{ y \in \mathbb{R}^n : r < \| y \| \leqslant r + \| x \| \}$$

(pues $\| y \| \leqslant \| y - x \| + \| x \| \leqslant r + \| x \|$)

de donde $|\overline{B_r(x)} - \overline{B_r(0)}| = v_n \left[(r + \| x \|^n) - r^n \right]$

reemplazando encontramos que:

$$|u(x) - u(0)| \leqslant \frac{1}{r^n} \| u \|_\infty \left[(r + \| x \|)^n - (r - \| x \|)^n \right]$$

$$= \frac{1}{r^n} \| u \|_\infty P(r)$$

pero $P(r)$ es un polinomio en r de grado $\leqslant n-1$ luego

$\frac{1}{r^n} \| u \|_\infty P(r) \to 0$ cuando $r \to \infty$, con lo que debe ser $u(x) = u(0)$

como x era arbitrario resulta que u es constante

Obs: la demostración consistió en usar que

$$\left| \int_A u(y)\, dy - \int_B u(y)\, dy \right| \leqslant \int_{A \,\Delta\, B} |u(y)|\, dy$$

con $A = \overline{B_r(x)}$ y $B = \overline{B_r(0)}$