Practica de Transformada de Fourier

Propiedad: Si $f \in S \Rightarrow (D^{\alpha} f)\hat{}(\xi) = (i\xi)^{|\alpha|} \hat{f}(\xi)$

Lo probamos primero para el caso de una derivada

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right]\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} e^{-ix\xi} dx =$$

$$= -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} (-i\xi_j) dx = i \xi_j \hat{f}(\xi)$$

(integrando por partes, siempre que f tienda a cero en ∞)

Por inducción se deduce que si f y las derivadas hasta el orden $|\alpha|-1$ de f tienden a cero en ∞ vale

$(D^{\alpha} f)\hat{}(\xi) = (i\xi)^{|\alpha|} \hat{f}(\xi)$

Propiedad: Si $f \in S \Rightarrow D^{\alpha}(\hat{f}) = [(-ix)^{\alpha} f]\hat{}$

Dem: Lo probamos primero para una derivada

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Derivando bajo el signo de integral

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} (-ix_j) dx = (-ix_j f)\hat{}$$

Por inducción sale que $D^{\alpha}(\hat{f}) = ((-ix)^{\alpha} f)\hat{}$

Propiedad: $(f*g)\hat{} = (2\pi)^{n/2} f\hat{}.g\hat{}$

Dem:

$$(f*g)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{-ix\xi} dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u).g(u) du \right\} e^{-ix\xi} dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) g(u) e^{-ix\xi} du dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) g(u) e^{-ix\xi} dx \right\} du =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(u) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\, e^{-ix\xi}\, dx \right\} du$$

En la integral interior hago el cambio de variable $z = x - u$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(u) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, e^{-i(z+u)\xi}\, dz \right\} du$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(u)\, e^{-iu\xi} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, e^{-iz\xi}\, dz \right\} du$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(u)\, e^{-iu\xi}\, dz \right\} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, e^{-iz\xi}\, dz \right\}$$

$$= (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$$

<u>Obs:</u> Si definimos la convolución por

$$(f*g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, g(x-u)\, du$$

vale $(f*g)^{\wedge} = f^{\wedge}.g^{\wedge}$

<u>1</u>) a) $f(x) = \chi_{[-a,a]}$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, 2\, \frac{\operatorname{sen}(\xi a)}{\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{sen}(\xi a)}{\xi}$$

c) $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1 + x^2}\, dx$$

Para calcular esta integral uso el método de los residuos (variable compleja)

Considero la función de variable compleja: $g(z) = \dfrac{e^{-iz\xi}}{1 + z^2}$

$g(z) = \dfrac{h(z)}{k(z)}$ con $h(z) = e^{-i\xi z}$ y $k(z) = 1 + z^2$

La función g es holomorfa en $\mathbb{C} - \{ i, -i\}$

En $\pm i$ tiene polos simples pues k tiene ceros simples

$$\text{Res } g(i) = \frac{h(i)}{k'(i)} = \frac{e^{\xi}}{2i}$$

$$\text{Res } g(-i) = \frac{h(-i)}{k'(-i)} = \frac{e^{-\xi}}{-2i}$$

<u>Caso</u> $\xi < 0$: Aplicamos el teorema de los residuos al contorno γ_r formado por el intervalo $[-r,r]$ del eje real y la semicircunferencia

C_r: $z = r.e^{it}$ con $0 \leqslant t \leqslant \pi$ con $r > 1$ (de modo la única singularidad de g en el interior

de γ_r es $z = i$)

Tenemos: $\displaystyle\int_{\gamma_r} g(z)\, dz = 2\pi i \text{ Res } g(i)$

(Obs: el índice el punto i respecto al contorno es 1, se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj)

o sea:

$$\int_{-r}^{r} g(z)\, dz + \int_{C_r} g(z)\, dz = \pi\, e^{\xi}$$

Si podemos probar que la integral sobre C_r tiende a cero resultará

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{\xi}$$

En el semiplano $y \geqslant 0$ tenemos la acotación:

$$|e^{-i\xi z}| = |e^{-i\xi(x+yi)}| = |e^{-i\xi x}|.|e^{-\xi y}| \leqslant e^{-\xi y} \leqslant 1$$

Por lo tanto sobre C_r: $|g(z)| \leqslant \dfrac{1}{|\ 1 + z^2\ |}$

pero $|1 + z^2| = |\ z^2 - (-1)\ | \geqslant |z|^2 - 1 \geqslant r^2 - 1$

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{r^2 - 1} \Rightarrow \left| \int_{C_r} g(z)\, dz \right| \leqslant \frac{\pi r}{r^2 - 1} \to 0$$

cuando $r \to \infty$

(uso que $\left| \displaystyle\int_{C_r} g(z)\, dz \right| \leqslant \text{long}(C_r).\sup_{\gamma_r} |g(z)|$)

<u>Caso</u> $\xi > 0$: Se repite el argumento con γ_r formado por el intervalo $[-r,r]$ del eje real y la semi-circunferencia C_r : $z = r\, e^{-it}$ con $0 \leqslant t \leqslant \pi$ y $r > 1$

Esta vez $\int_{\gamma_r} g(z)\, dz = (-1)\, 2\pi i \operatorname{Res} g(-i)$

(aparece un -1 debido a que el índice del punto $-i$ repecto al contorno es -1 ya que se recorre en el sentido de las agujas del reloj)

$$\int_{-r}^{r} g(z)\, dz + \int_{C_r} g(z)\, dz = \pi\, e^{-\xi}$$

de donde resulta

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-\xi}$$

(Notemos que de nuevo la integral sobre C_r tiende a cero ya que la acotación $|e^{-i\xi z}| \leqslant 1$ vale en el semiplano $y < 0$)

Combinando los resultados tenemos que:

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-|\xi|}$$

<u>2)</u> b) Defino $\delta_a f$ por $\delta_a f(x) = f(ax)$

$(\delta_a f)\hat{}\ (\xi) = a^{-n}\, \hat{f}(\xi/a)$ (si $a > 0$)

[la misma formula que en las aproximaciones de la identidad]

Dem:

$(\delta_a f)\hat{}\ (\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\, e^{-ix\xi}\, dx =$ (hago un cambio $u = ax$)

$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, e^{-iu\xi/a}\, a^{-n}\, du =$

$= a^{-n}\, \hat{f}(\xi/a)$

d) Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\hat{f}} = \tilde{f}$

<u>Dem:</u> Haciendo el cambio de variable $u = -x$ tenemos

$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(-u)\, e^{iu\xi}\, dx = (\tilde{f})^{v}(\xi)$ donde $\tilde{f}(x) = f(-x)$

Aplicando la fórmula de inversión $\hat{\hat{f}} = \tilde{f}$

Si f es par resulta que $\hat{f} = \check{f}$

<u>Obs:</u> (Mia) Supongamos que $f{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces

$$\overline{\hat{f}(\xi)} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\ \overline{e^{-ix\xi}}\ dx = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ e^{ix\xi}\ dx = \check{f}(\xi)$$

Por lo tanto si f es par y con valores reales $\Rightarrow \hat{f}$ es real

Otra forma de verlo es:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ e^{-ix\xi}\ dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cos(x\xi)\ dx - i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{sen}(x\xi)\ dx \right]$$

pero $f(x)\operatorname{sen}(\xi x)$ es una función impar [pues f es par] $\Rightarrow$ la segunda integral se anula y tenemos:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cos(x\xi)\ dx$$

(Este resultado es análogo al hecho de que una función períodica par se desarrolla en serie de cosenos)

Análogamente si f es impar y con valores reales $\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ es imaginario puro , de hecho:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{sen}(x\xi)\ dx$$

de hecho ahora $f(x)\cos(\xi x)$ es impar y por lo tanto su integral en $\mathbb{R}^n$ se anula.

<u>3)</u> Calcular $\hat{f}$ siendo $f(x) = e^{-x^2/2}$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\ dx = 1$$

(Es la densidad normal de probabilidad !)

Por otra parte $f' = (-x)\ e^{-x^2/2} = (-x)\ f$ y $f(0) = 1$

$(\hat{f})' = (-ixf)\hat{} = (if')\hat{} = i.(f')\hat{} = i(i\xi).\hat{f} = -\xi\ f$

entonces tanto f como $\hat{f}$ son soluciones del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} g'(x) = (-x).g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

por unicidad f = g

Usando el ejercicio 2) parte b) vamos a calcular la transformada de

$$g(x) = e^{-ax^2} = e^{-2a\,(x^2/2)} = f(ux) \quad \text{con } u = \sqrt{2a}$$

$$\hat{g}(\xi) = u^{-1/2}\,\hat{f}(\xi/u) = (2a)^{-1/2}\, e^{-(\xi/u)^2/2} = (2a)^{-1/2}\, e^{-\xi^2/4a}$$

7) a) Ecuación del calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_o(x) \end{cases}$$

Aplico la transformada de Fourier en x a ambos miembros de la ecuación

$\hat{u}_t(\xi,t) = (i\xi)^2\,\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2\,\hat{u}(\xi,t)$

y a la condición inicial:

$\hat{u}\,(\xi,0) = \hat{u}_o(\xi)$

Para cada ξ fijo tengo un problema de valores iniciales (ecuación ordinaria)

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) = -\xi^2\,\hat{u}(\xi,t) \\ \hat{u}\,(\xi,0) = \hat{u}_o(\xi) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la solución es $\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_o(\xi)\, e^{-\xi^2 t}$

$g(x) = e^{-ax^2} \Rightarrow \hat{g}(\xi) = (2a)^{-1/2}\, e^{-\xi^2/4a}$

Poniendo $t = \dfrac{1}{4a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4t} \Rightarrow \hat{g}(\xi) = (1/2t)^{-1/2}\, e^{-\xi^2 t} = \sqrt{2t}\; e^{-\xi^2 t}$

$\Rightarrow$ la transformada de Fourier de $K_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2t}}\; e^{-x^2/4t}$ es $\hat{K}_t(\xi) = e^{-\xi^2 t}$

por lo tanto usando la propiedad de la transformada de Fourier de transformar la convolución en producto vemos que:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-1/2}\,(u_o * K_t)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_o(x-u)\, \frac{1}{\sqrt{2t}}\; e^{-u^2/4t}\, du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_o(x-u)\, e^{-u^2/4t}\, du$$

(Formula de Poisson para resolver la ecuación del calor)

b) Ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_o(x) \end{cases}$$

Aplico transformada de Fourier en x

$(i\xi)^2\ \hat{u}(\xi,y) + \hat{u}_{yy}(\xi,y) = 0$

o sea

$-\xi^2\ \hat{u}(\xi,y) + \hat{u}_{yy}(\xi,y) = 0$

con la condición inicial de que $\hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_o(\xi)$

llamando $g(y) = \hat{u}(\xi,y)$ con ξ fijo

$g'' = \xi^2\ g \Rightarrow g = c_1\ e^{\xi y} + c_2\ e^{-\xi y}$

evaluando en $y = 0$ resulta que $c_1 + c_2 = \hat{u}_o(\xi)$

$\hat{u}(\xi,y) = c_1(\xi)\ e^{\xi y} + c_2(\xi)\ e^{-\xi y}$ para $y > 0$

como es una transformada de Fourier debe tender a cero cuando $|\xi| \to \infty$

Es razonable tomar $\hat{u}(\xi,y) = \hat{u}_o(\xi)\ e^{-|\xi|y}$

<u>Observacion:</u> uno sospecha que al elegir esto pierde soluciones.
Esto en realidad es así , el problema no tiene solución única.
Si $u(x,y)$ es una solución $v(x,y) = u(x,y) + y$ es otra solución.

En el ejercicio 1 vimos que

$f(x) = (1 + x^2)^{-1} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = (\pi/2)^{1/2}\ e^{-|\xi|}$

Utilizamos el ejercicio 2) b) con $a > 0$

$g(x) = (1 + (ax)^2)^{-1} \Rightarrow \hat{g}(\xi) = a^{-1}\ (\pi/2)^{1/2}\ e^{-|\xi/a|}$

Poniendo 1/a en lugar de a

$g(x) = (1 + (x/a)^2)^{-1} \Rightarrow \hat{g}(\xi) = a\ (\pi/2)^{1/2}\ e^{-|\xi|a}$

$$g(x) = \frac{a^2}{a^2 + x^2} \quad (a > 0) \quad \Rightarrow \hat{g}(\xi) = a\ (\pi/2)^{1/2}\ e^{-|\xi|a}$$

$$g(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}\ (\pi/2)^{-1/2} \quad (a > 0) \quad \Rightarrow \hat{g}(\xi) = e^{-|\xi|a}$$

Pongamos:

$$P_y(x) = \frac{y}{y^2 + x^2}\ (\pi/2)^{-1/2}$$

Recordando que la transformada de Fourier transforma la convolución en producto tenemos que $u(x,y) = (2\pi)^{-1/2}\ (u_o * P_y)(x)$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} u_o(x-t) \frac{y}{y^2 + t^2}\ dt$$

<u>c)</u> Ecuación de Onda:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_o(x) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

transformo Fourier en x

$\hat{u}_{tt}(\xi,t) = (i\xi)^2\ \hat{u}(\xi,x) = -\xi^2\ u(x,\xi)$

con la condición inicial

$\hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_o(\xi)$

$\hat{u}_t(\xi,0) = \hat{u}_1(\xi)$

$\hat{u}(x,\xi) = c_1(\xi)\ \mathrm{sen}(\xi t) + c_2(\xi)\ \cos(\xi t)$

$c_2(\xi) = \hat{u}_o(\xi) \quad \xi . c_1(\xi) = \hat{u}_1(\xi)$

$$\hat{u}(x,\xi) = \hat{u}_1(\xi)\ \frac{\mathrm{sen}(\xi t)}{\xi} + \hat{u}_o(\xi)\ \cos(\xi t)$$

Por los resultados anteriores $\dfrac{\mathrm{sen}(\xi t)}{\xi}$ es la transformada de

$(\pi/2)^{1/2}.\chi_{[-t,t]} \Rightarrow \hat{u}_1(\xi)\ \dfrac{\mathrm{sen}(\xi t)}{\xi}$ es la transformada de Fourier de

Como $(2\pi)^{1/2}\ (\pi/2)^{1/2}.\chi_{[-t,t]} * u_1$

$$u_1 * \chi_{[-t,t]}\ (x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-t,t]}(y)\ u_1(x-y)\ dy =$$

$$= \int_{-t}^{t} u_1(x-y)\ dy = \int_{x+t}^{x-t} -u_1(z)\ dz = \int_{x-t}^{x+t} u_1(z)\ dz \quad (z = x-y)$$

$\cos(\xi t) = 1/2\ (e^{-\xi t} + e^{-\xi t})$

por el ejercicio 2 a) resultta que $\hat{u}_o(\xi)\cos(\xi t)$ es la transformada de

$$\frac{u_o(x-t) + u_o(x+t)}{2}$$

Uniendo ambos resultados tenemos:

$$u(x,t) = \frac{u_o(x-t) + u_o(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(z)\, dz$$

(Formula de D'Alambert)