Ecuaciones Diferenciales - Lista adicional de ejercicios

13 de diciembre de 2002

La siguiente es una selección de ejercicios de prácticas y parciales viejos, de los temas correspondientes al primer parcial.

1. Sea $\mathcal{J}$ la funcional dada por

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^1 (ty^2)^2 + r(t)yy' + (y')^2 dt$$

con $r \in C^1$ decreciente. Probar:

(a) Todo extremal de $\mathcal{J}$ (con extremos fijos) es un mínimo.

(b) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existe a lo sumo un extremal $y \in C^2$ de $\mathcal{J}$ tal que $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$. *Sug*: si y_1, y_2 son extremales, verificar que $w = y_1 - y_2$ no puede tener extremos en $(0, 1)$.

2. Sea L el operador dado por $Lu = (x^2 - 3)u'' + 2xu' - 6u$.

(a) Acotar los autovalores $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ del problema

$$\begin{cases} Lu &= \lambda u \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{cases}$$

(b) Probar que si la n-ésima autofunción es un polinomio de grado n, entonces $\lambda_n = N(N+1) - 6$ y $N \geq n + 2$.

(c) Mostrar que la igualdad $N = n + 2$ vale si y sólo si $n = 0$, y deducir que L es un operador positivo.

3. Dado el problema

$$\begin{cases} -y\partial_x u + x\partial_y u &= u \\ u|_{y=0} &= x^2 \end{cases}$$

probar que si $x \neq 0$ existe una única solución de clase C^1 definida en un entorno de $(x,0)$. ¿Qué ocurre para $x=0$? (o bien: "Probar que no existe solución C^1 definida en un entorno de $(x,0)$")

4. Probar que la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'' + u^2 &= u \\ u(0) &= \frac{3}{2} \\ u'(0) &= 0 \end{cases}$$

satisface: a) u es par.

b) $u > 0$, $u'(t) < 0$ para $t > 0$.

c) u está definida en $\mathbb{R}$, y $u \to 0$ para $|t| \to \infty$.

5. Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \partial_x u - \frac{1}{x^2}\partial_y u \quad = \quad yu \\ u|_{x=y} = xe^{x^2} \end{cases}$$

6. Sea L el operador definido por $Lu = (-pu')' + qu$, con $0 < p \in C^1([a,b])$, $0 \leq q \in C([a,b])$. Probar que si G es la función de Green asociada a L, y u_n es la n-ésima autofunción de L con autovalor λ_n, entonces

$$G(x,y) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(y)$$

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y $\phi(t,X)$ el flujo asociado al problema $X' = AX$. Probar:

a) $\frac{\partial}{\partial t}(D_X\phi) = AD_X\phi$.

b) $\frac{\partial}{\partial t}det(D_X\phi) = tr(A)det(D_X\phi)$

c) Deducir que si $tr(A) = 0$, entonces $|\phi(V)| = |V|$ para todo $V \subset \mathbb{R}^n$ medible.

8. a) Encontrar los puntos críticos de la funcional

$$\int_0^\alpha (y')^2 - y^2 - 6ysen(2x)dx$$

con condiciones de borde $y(0) = 0$, $y(\alpha) = A$.

b) Probar que si α es suficientemente pequeño, entonces el punto crítico obtenido en a) es un mínimo. Calcular α explícitamente.

9. Sea $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ simétrica con autovalores $\alpha_1(t) \leq ... \leq \alpha_n(t) \leq c < 0$. Probar que si X es solución de la ecuación $X' = A(t)X$, entonces $X(t) \to 0$ para $t \to +\infty$.

10. Sea $A \in C^0(I, \mathbb{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}})$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, para $s \in I$ se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \qquad t \in I \\ \\ x(s) = x_0 \end{cases}$$

 (a) Probar que $x(t)$ se anula en un punto si y solo si $x(t)$ es siempre nula.
 (b) Probar que el flujo $\phi(t, s, x_0) = x(t)$ es lineal en x_0 y vale $\phi \in C^1(I \times I, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$.

11. Sea $f(t, x)$ continua y Lipschtiz en la segunda variable, probar que si

$$\langle f(t,x), x\rangle \leq C\,\|x\|^2$$

entonces el sistema $\dot{x} = f(t, x)$ tiene soluciones globalmente definidas para toda condición inicial.

12. Sea $f(t, x, \alpha)$ una función continua en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, Lipschtiz en la segunda variable tal que si $|\alpha - \overline{\alpha}| \leq r$, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}^\alpha = f(t, x^\alpha, \alpha) \\ \\ x^\alpha(0) = x_0 \end{cases}$$

están definidas en $[-T, T]$. Probar que

$$\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}} x^\alpha(t) = x^{\overline{\alpha}}(t)$$

13. Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{\varepsilon} = x_1^{\varepsilon} \\ \\ \dot{x}_2^{\varepsilon} = x_1^{\varepsilon} + (1+\varepsilon)\, x_2^{\varepsilon} \end{cases}$$

(a) Obtener la solución $x^{\varepsilon}(t)$ que verifica $x^{\varepsilon}(0) = (1,0)$

(b) Calcular $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x^{\varepsilon}(t)$

14. Dadas $a(t,\lambda), b(t,\lambda)$ continuas, consideramos el problema

$$\begin{cases} \ddot{x}_\lambda + a(t,\lambda)\, \dot{x}_\lambda + b(t,\lambda)\, x_\lambda = 0 \\ \\ x_\lambda(0) = 0,\ \dot{x}_\lambda(0) = 1 \end{cases}$$

probar que, entonces $N(\lambda) = \#\{t \in (0,1) : u_\lambda(t) = 0\}$ es localmente constante si $u_\lambda(1) \neq 0$