Problemas variacionales con condiciones subsidiarias

1-Problema isoperimetrico generalizado[1]

Queremos resolver el siguiente problema:

encontrar y que haga estacionaria la integral

$$J = \int_{x_o}^{x_1} F(x,y,y')\, dx$$

con los valores de frontera $y(x_o) = y_o,\ y(x_1) = y_1$

y sujeto a la restricción sub-sidiaria

$$K = \int_{x_o}^{x_1} G(x,y,y')\, dx = c$$

Supongamos que y es la extremal deseada.Entonces consideramos la función $y + \varepsilon_1.\eta + \varepsilon_2.\zeta$ donde η y ζ son funciones tales que $\eta(x_o) = \eta(x_1) = \zeta(x_o) = \zeta(x_1)$ y $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ se elijen de modo que

$$\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \int_{x_o}^{x_1} G(x,y + \varepsilon_1\ \eta + \varepsilon_2\ \zeta,\ y'+ \varepsilon_1\ \eta' + \varepsilon_2\ \zeta')\, dx = c$$

Considero la función

$$\phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \int_{x_o}^{x_1} F(x,y + \varepsilon_1\ \eta + \varepsilon_2\ \zeta\ ,y' + \varepsilon_1\ \eta' + \varepsilon_2\ \zeta')\, dx$$

Entonces ϕ tiene un punto crítico en $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ sujeto a $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0$

Tratamos este problema por el método de los multiplicadores de Lagrange

Calculemos las derivadas parciales de ϕ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_1} = \int_{x_o}^{x_1} F_y\ .\ \eta + F_{y'}.\eta'\ dx$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_2} = \int_{x_o}^{x_1} F_y\ .\ \zeta + F_{y'}.\zeta'\ dx$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_1} = \int_{x_o}^{x_1} G_y\ .\ \eta + G_{y'}.\eta'\ dx$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_2} = \int_{x_o}^{x_1} G_y\ .\ \zeta + G_{y'}.\zeta'\ dx$$

Excepto si las derivadas parciales de ψ se anulan simultaneamente existe un λ tal que:

[1] Courant - Hilbert Methods of Mathematical Physics Cap. IV

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_1} = \lambda.\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_1} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_2} = \lambda.\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_2}$$

o sea:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y\ .\ \eta + F_{y'}.\eta' - \lambda.\ (\ G_y\ .\ \eta + G_{y'}.\eta')\ dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y\ .\ \zeta + F_{y'}.\zeta' - \lambda.\ (\ G_y\ .\ \zeta + G_{y'}.\zeta')\ dx = 0$$

O sea:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \lambda.G_y).\ \eta + (F_{y'} - \lambda.G_{y'}).\eta' dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \lambda.G_y).\ \zeta + (F_{y'} - \lambda.G_{y'}).\zeta' dx = 0$$

Esto nos lleva (integrando por partes)
a la ecuación de Euler para el problema

$$\int_{x_0}^{x_1} F^*(x,y,y')\ dx = \text{extremo}$$

con $F^* = F - \lambda.G$ sin condiciones subsidiarias
Cuando las derivadas parciales de ψ respecto a ε_1 y a ε_2 se anulan simultáneamente η,ζ satisfacen la ecuación de Euler para G:
$G_y - (G_{y'})' = 0$
pero como η,ζ son arbitarias esta debe ser una identidad.

<u>Ejemplo 1:</u> problema isoperimetrico clásico

Tomamos $F = y$, $G = \sqrt{1 + y'^2}$ entonces:

$$F^* = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow 1 = \frac{d}{dt}\left[\lambda\sqrt{1 + y'^2}\right]$$

$$k = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Esta ecuación nos da que las extremales son círculos
<u>Ejemplo 2:</u> cable suspendido

$F = y\sqrt{1 + y'^2}$ (la integral J es la energía potencial)

$G = \sqrt{1 + y'^2}$

Aquí $F^* = (y+\lambda)\sqrt{1 + y'^2}$

Como F no depende de x una integral primera de la ecuación de Euler es

$$F^* - y' F^*_{y'} = (y+\lambda)\left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

que da $y + \lambda = c \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right)$ (una catenaria)

<u>2- Condiciones subsidiarias finitas</u>

Consideraremos ahora otro tipo de problema variacional: hacer la integral $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,dx$ estacionaria en comparación con funciones que satisfacen además de las condiciones de contorno $y(x_0) = y_0$ $y(x_1) = y_1$ $z(x_0) = z_0$ $z(x_1) = z_1$ una condición subsidiaria de la forma:

$$G(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

Geométricamente buscamos una curva $y = y(x)$ $z = z(x)$ en una superficie que haga mínima lao máxima la integral.

Una forma natural de obtener condiciones necesarias pra las funciones $y(x)$, $z(x)$ es resolver la ecuación $G(x,y,z) = 0$ para una de las funciones digamos $y(x)$ reduciendo de este modo el problema a determinar una función independiente $y(x)$

Por el teorema de la función implícita la solución $z = g(x,y)$ puede ciertamente ser obtenida si $\partial G/\delta z \neq 0$ en la extremal en cuestión.

Entonces $G(x,y(x),z(x)) = 0$ donde $z(x) = g(x,y(x))$

Derivando esta relación tenemos $G_x + G_y.y' + G_z.z' = 0$

$z'(x) = g_x + g_y.y'$

Así tenemos

$F(x,y,z,y',z') = F(x,y,g(x,y),y,g_x(x,y(x)) + g_y(x,y(x).y'(x))$

$\Rightarrow$ y debe satisfacer la ecuación de Euler:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = \frac{d}{dx}\left[F_{y'} + F_{z'}.g_y\right] - \left[F_y + F_z.g_y + F_{z'}.(g_{xy} + g_{yy}.y')\right] = 0$$

que se facilmente se transforma en:

$$(F'_{y'} - F_y) + (F'_{z'} - F_z)\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

(la ' significa derivar respecto de x)

pero como $G_y + G_z \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$

se debe mantener la proporción:

$$\frac{F'_{y'} - F_y}{F'_{z'} - F_z} = \frac{G_y}{G_x}$$

Por lo tanto o bien $G_y = G_x = 0$ identicamente a lo largo de la extremal (lo que contradice nuestra hipótesis) o existe un factor de proporcionalidad $\lambda = \lambda(x)$ para el cual:

$$F'_{y'} - F_y = \lambda . G_x = 0$$
$$F'_{z'} - F_z - \lambda . G_z = 0$$

Si llamamos $F^* = F + \lambda G$ el resultado se puede escribir como las ecuaciones de Euler para F^*:

$$F^{*\prime}_{y'} - F^*_y = 0 \quad F^{*\prime}_{z'} - F^*_z = 0$$

Estas ecuaciones son condiciones necesarias para un extremo a menos que las dos ecuaciones $G_y = 0$ $G_x = 0$ valgan identicamente en la extremal.
En este caso $G_z = 0$ pues $G_x + G_y . y' + G_z . z' = 0$
El factor λ que aparece aquí y en el ejemplo previo se conoce como multiplicador de Euler o Lagrange.
Es importante notar que aquí λ es una función mientras que en el ejemplo previo era una constante.

<u>Ejemplo:</u> un caso especial es determinar las Geodesicas en una superficie $G(x,y,z) = 0$

Aquí $F = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2 + z'^2}$ donde la curva se da en forma paramétrica como $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$
Entonces tenemos las ecuaciones:

$$F'_{x'} - F_x - \lambda . G_x = 0$$
$$F'_{y'} - F_y - \lambda . G_y = 0$$
$$F'_{z'} - F_z - \lambda . G_z = 0$$

o sea:

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \lambda . G_x = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \lambda . G_y = 0$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \lambda . G_z = 0$$

Como $\nabla G = (G_x, G_y, G_z)$ es normal a la superficie estas ecuaciones dicen que el vector tangente $(x'(t), y'(t), z'(t))$ a la curva debe ser normal a la superficie en cada punto