Ecuaciones Diferenciales: Práctica 1
Ecuaciones Ordinarias

Primer cuatrimestre del 2002

Temas: Métodos de resolución. Existencia y unicidad. Condiciones de existencia global. Dependencia continua y diferenciable de los datos. Flujo

1 Repaso de los Métodos de Resolución

1. **Separación de variables**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\dot{x} = \dfrac{x}{t}$

   (b) $\dot{x} = \dfrac{t^2}{x}$

   (c) $\dot{x} = \dfrac{1+t}{1-x}$

   (d) $\dot{x} = t \exp x$

   (e) $\dot{x} = t^2 \operatorname{sen} x$

2. **Ecuaciones homogéneas**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\dot{x} = \dfrac{x}{t} + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2$

   (b) $\dot{x} = -\dfrac{t+x}{t}$

3. **Ecuaciones lineales. Ecuación de Bernoulli**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\dot{x} - x = t^2$

   (b) $\dot{x} + 2x = t^4$

   (c) $t\dot{x} + x - e^t = 0$

   (d) $t\dot{x} + x + t^2x^2 = 0$

4. **Ecuaciones exactas. Factor Integrante**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $(x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$

   (b) $(x^2+y^2+2x)\,dx+2xydy=0$

   (c) $(x^3-3xy^2+2)\,dx-(3x^2y-y^2)\,dy=0$

   (d) $(x+y^2)\,dx-2xydy=0$

5. **Problemas con condiciones iniciales**

   Encontrar la solución de

   (a) $\dot{x}=\dfrac{x}{t} \quad x(1)=3$

   (b) $\dot{x}=\dfrac{x}{2t} \quad x(9)=2$

   (c) $\dot{x}=\dfrac{x}{t}+\dfrac{t}{x} \quad x(2)=4$

   (d) $tx^2dx=(t^3+x^3)\,dt \quad x(1)=1$

   (e) $\ln(x^2+1)+\dfrac{2x(t-1)}{x^2+1}\dot{x}=0 \quad x(2)=0$

   (f) $t+x^2-2tx\dot{x}=0 \quad x(1)=2$

   (g) $\dot{x}-\dfrac{n}{t}x=e^t t^n \quad x(1)=e+3$

   (h) $\dot{x}=\lambda x^2 \quad x(t_0)=x_0$

1.0.1 Sistemas lineales. Ecuaciones de orden superior

1. Obtener la solución general de las siguientes sistemas

   (a) $\begin{cases} \dot{x}_1=x_1+2x_2 \\ \dot{x}_2=3x_1+2x_2 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dot{x}_1=2x_1+3x_2 \\ \dot{x}_2=-3x_1+8x_2 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \dot{x}_1=3x_1+4x_3 \\ \dot{x}_2=x_1+x_2+2x_3 \\ \dot{x}_3=x_1-2x_2+2x_3 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} \dot{x}_1=2x_1+3x_2+e^{5t} \\ \dot{x}_2=-3x_1+8x_2+3e^{5t} \end{cases}$

2. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$
   (b) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2$
   (c) $\ddot{x} - \dot{x} + x = t^3 + 6$
   (d) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{2t}$
   (e) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^t \cos 2t$

2 Teoría General

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, e $y = y(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:

   (a) $y \in C^1[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y es una solucion del problema de valores iniciales:

   $$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

   (b) $y \in C[0, T]$ es una solución de la ecuación integral

   $$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

4. En la situación anterior definamos un operador $K : C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ por:

   $$Ky(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

   Probar que si f es localmente Lipschitz en la segunda variable, y δ es suficientemente pequeño entonces K es una contraccion en el espacio de Banach $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Deducir que el problema de valores iniciales tiene una solucion unica en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

5. Si en lugar de tener una ecuación tenemos un sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_i' & = & f(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_i(t_0) & = & y_{0i} \end{array} \right. \quad \text{con } 1 \le i \le n$$

¿Cómo se puede adaptar el argumento anterior ? ¿Que podemos decir acerca de un problema de valores iniciales para una una ecuacion de orden superior?

$$y^{(n)} = f(t, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

6. En general no es posible obtener soluciones globales de (1) (esto es definidas para todo t).

   (a) Si en un intervalo $[t_0, T)$ (sin importar cuan grande es T) tenemos dos soluciones de (1) con f localmente Lipschitz , probar que coinciden en todo el intervalo $[0, T)$.

   (b) Si $I = [0, t^*)$ es el intervalo maximal de existencia (el mayor intervalo en el que existe solución) probar que

   $$\lim_{t \to t^*} |y(t)| = +\infty$$

   (Vea que si y se mantuviera acotada cerca de t^* , se podría prolongarla).

7. Spongamos ahora que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es globalmente lipchitz en y ,con la constante de Lipchitz independiente de $t \in [t_0, T]$ o sea que:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L\, |y_1 - y_2|\, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0, T]$$

Probar que si n es suficientemente grande K^n es una contraccion en $C([t_0, T])$, cuyo único punto fijo es la unica solucion del problema de valores iniciales (1).

8. Si $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ entonces el sistema lineal $y'(t) = A(t)y(t)$ tiene una solucion unica definida para todo t .

9. Consideramos el problema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(y(t)) \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 y $f(u) > 0 \forall u$. Probar que la solución y es global si y sólo si la integral $\int_0^\infty \frac{du}{f(u)}$diverge.

10. **Lema de Gronwall:** Supongamos que las funciones $u(s)$ y $v(s)$ son continuas y no negativas en el intervalo $[t_0, t]$ y la función $c(s)$ es C^1 y no negativa en el intervalo $[t_0, t]$ que satisfacen:

$$v(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds$$

entonces

$$v(t) \leq c(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} u(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} c'(s) \exp\left(\int_{s}^{t} u(\tau)d\tau\right) ds$$

11. **Dependencia Continua:** Con las hipótesis del ejercicio 1 probar que la solución del problema (1) depende continuamente del dato inicial y_0 (Formule esta afirmación de manera preisa).

12. **Flujo:** Consideramos un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente lipchitz. Definimos el flujo del campo f como la aplicación $\phi(t, x) = \phi_t(x) = y(x)$ donde y es la única solución del problema:

$$\begin{cases} y' &= f(y(t)) \\ y(0) &= x \end{cases}$$

Probar que (ϕ_t) tiene las propiedades siguientes (Validas si s, t son suficientemente pequeños. Se dice que forman un grupo local a un parámetro)

$$\phi_0 = Id$$

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$$

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$$

13. Si f es C^1 , probar que la solución del problema (1) depende de la condición inicial y_0 de manera diferenciable. ¿ Qué ecuación diferencial satisface $\frac{\partial y}{\partial y_0}$?