Ecuaciones Diferenciales

Práctica 3 - Cálculo de Variaciones

Ecuaciones de Euler-Lagrange

1. Determinar las trayectorias extremales de las siguientes funcionales

i) $\mathcal{J}(x)=\int_{-1}^{0}\left(\dot{x}^2-12tx\right)dt$, con las condiciones $x(-1)=1,\ x(0)=0$.

ii) $\mathcal{J}(x)=\int_{1}^{2}\left(\dot{x}^2+2x\dot{x}+x^2\right)dt$ con las condiciones $x(1)=1,\ x(2)=0$.

iii) $\mathcal{J}(x)=\int_{0}^{1}\sqrt{x(1+\dot{x}^2)}dt$ con las condiciones $x(0)=x(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

iv) $\mathcal{J}(x)=\int_{0}^{1}\left(\dot{x}^2-1\right)^2dt$ con las condiciones $x(0)=x(1)=0$.

v) $\mathcal{J}(x)=\int_{0}^{1}x^2+2\dot{x}^2+\ddot{x}^2dt$ con las condiciones $x(0)=x(1)=0,\quad \dot{x}(0)=1, \dot{x}(1)=senh(-1)$.

vi) $\mathcal{J}(x,y)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2y^2-4x^2+\dot{x}^2-\dot{y}^2)dt$ con las condiciones $x(0)=y(0)=0,\quad x(\frac{\pi}{4})=y(\frac{\pi}{4})=1$.

2. Sea x una solución de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t)\right)-\frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x},t)=0$$

i) Probar que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t)\,\dot{x}-L(x,\dot{x},t)\right)=\frac{\partial L}{\partial t}(x,\dot{x},t).$$

ii) Ver que si $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$, entonces $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t)\,\dot{x}-L(x,\dot{x},t)=\quad cte$

Problemas en Varias Variables

3. Probar que si u es una extremal regular de

$$\mathcal{J}(u)=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u(x)\right|^2+f(x)\,u(x)\right)dx$$

con $\Omega\subset\ R^n$, entonces u satisface la ecuación

$$-\Delta u(x)=f(x)$$

4. Obtener la ecuación de Euler-Lagrange del problema de superficies mínimas

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \left(1 + |\nabla u(x)|^2\right)^{1/2} dx$$

Problemas con Restricciones

5. Hallar la ecuación de Euler-Lagrange de la funcional

$$\int_0^1 p\dot{x}^2 + qx^2 dt$$

sujeto a

$$\int_0^1 x^2 dt = 1$$

donde p es diferenciable y positiva, q es continua.

6. Hallar la curva de longitud mínima sobre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ que une los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

7. Hallar la curva cerrada en el plano de longitud L que encierra mayor área.

Sug: Si la curva se parametriza por $(x(t), y(t))$, entonces el área encerrada es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt$$

Aplicaciones

8. **Principio de Fermat:**

El camino que recorre un rayo de luz al propagarse con velocidad $v(x, y)$ en un medio bidimensional no homogéneo constituye una extremal de la funcional

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(1 + y'(x)^2\right)^{1/2} y(x) dx$$

Suponiendo que $v(x, y) = y$, hallar la trayectoria que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) del semiplano superior. Verificar que los rayos de luz representan arcos de circunferencia con centro en el eje x.

9. **Resistencia mínima en un fluido**

Determinar la forma del cuerpo de revolución que al moverse en un fluido encuentra resistencia mínima. La fuerza de resistencia es

$$F(y) = 4\pi\rho v^2 \int_0^l y(x)\ y'(x)^3\, dx$$

siendo ρ y v constantes, $y(0) = 0$ y $y(l) = R$.