Ecuaciones Diferenciales- Práctica 4
Primer cuatrimestre de 2002

1 Ecuaciones de primer orden

1.1 Ecuaciones lineales

1. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

2. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x_2, \ldots, x_n) = x_2 \end{cases}$$

3. Hallar la solución del siguiente problema y analizar donde está definida

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & x \in \mathbb{R}^n \\ u(1, x_2, \ldots, x_n) = x_n \end{cases}$$

4. Dada la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

probar

(a) Cualquier solución es constante sobre hipérbolas $xy = \text{cte}$.

(b) Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta $u = x = y$.

5. Probar que no existe solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $x = y$.

6. Probar que la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

cuyo gráfico contiene a la recta $u = x = -y$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

7. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy \dfrac{\partial u}{\partial y} = (x + y)\, u \\ \\ u\,(0, y) = y \end{cases}$$

8. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} x \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} - 3u = 0 \\ \\ u\,(x, y, 0) = f\,(x, y) \end{cases}$$

suponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f. Estudiar el caso $f\,(x, y) = xy$.

9. Sea $a, b \in C^1\left(\overline{D}\right)$ tales que $xa\,(x, y) + yb\,(x, y) < 0$ si $x^2 + y^2 = 1$ donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Probar que si $u \in C^1\left(\overline{D}\right)$ es una solución de

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

entonces $u = 0$.

1.2 Ecuaciones cuasi-lineales

1. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 & \\ & \\ u\left(x, x\right) = \dfrac{x}{2} & x \in (0,1) \end{cases}$$

2. Estudiar el dominio de definición de la solución clásica de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha\left(u\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \\ u\left(0, y\right) = \phi\left(y\right) \end{cases}$$

   con α y ϕ no constantes.

3. Sea $u\left(x, t\right)$ la solución clásica del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + f\left(x, t\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta\left(x, t\right) \\ \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right) \end{cases}$$

   Ver que sobre las curvas características $\left(x\left(t\right), t\right)$, u se expresa como

$$u\left(x\left(t\right), t\right) = u_0\left(x\left(0\right)\right) + \int_0^t \beta\left(x\left(\xi\right), \xi\right) d\xi$$

4. Sea la ecuación de primer orden

$$\begin{cases} \left(1 + x^{2n}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2nx^{2n-1}y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 & \\ & \\ u\left(x, y\right) = g\left(x, y\right) & \left(x, y\right) \in \mathcal{E} \end{cases}$$

   donde n es un número natural, $\mathcal{E}$ la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y g una función suave.

   (a) Dar condiciones sobre g para que la solución clásica esté definida en el interior de la elipse.

   (b) Resolver para $g\left(x, y\right) = $ y $a = b = n = 1$.