ECUACIONES DIFERENCIALES

Práctica 5 - Espacios de Sobolev

1. Probar que en cada clase de $H^1(\Omega)$ existe a lo sumo una función continua.

2. Sea $f \in H^1(\mathbb{R})$, probar que $h^{-1}(f - \tau_h f)$ converge a f' en L^2 cuando $h \to 0$
Sug: Escribir $h^{-1}(f - \tau_h f)$ como $f' * \varphi_h$.

3. Sea $f \in H^1(a,b)$ y $\{(a_j, b_j)\}_{j\in J}$ una colección de intervalos disjuntos en (a,b), probar que

$$\sum_{j\in J} |f(b_j) - f(a_j)| \leq \|f\|_{H^1} \left(\sum_{j\in J} |b_j - a_j| \right)^{1/2}$$

4. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(a,b)$

$$|f(x)| \leq C \|f\|_{H^1}$$

5. Usando el teorema de Arzelá, probar que un conjunto acotado de $H^1(a,b)$ es precompacto en $C[a,b]$ (y por lo tanto en L^2).

6. Si $(a,b) \subset (c,d)$, probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(a,b)$ existe $F \in H_0^1(c,d)$ tal que $F \equiv f$ en (a,b) y vale

$$\|F\|_{H^1} \leq C \|f\|_{H^1}$$

7. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(a,b)$ con $f(a) = 0$

$$|f(x)| \leq C \|f'\|_{L^2}$$

Concluir que $\|f'\|_{L^2}$ es una norma equivalente $\|f\|_{H^1}$ en $H_0^1(a,b)$.

8. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi \equiv 0$ en $(-\infty, 1/2]$, $\psi \equiv 1$ en $[1, +\infty)$ y $\mathbf{D}$ el disco unitario de $\mathbb{R}^2$

a) Probar que si $u \in C^1\left(\overline{\mathbf{D}}\right)$, entonces

$$u(x,y) = \int_{1/2}^{1} \left[u(rx, ry)\, \psi'(r) + u_x(rx, ry)\, \psi(r) + u_y(rx, ry)\, \psi(r) \right] dr$$

para todo $(x, y) \in \partial \mathbf{D}$.

b) Probar que existe $C > 0$ tal que para toda $u \in C^1 \left(\overline{\mathbf{D}} \right)$ vale

$$\int_{\partial \mathbf{D}} |u|^2 \, d\sigma \leq C \int_{\mathbf{D}} \left(|u|^2 + |u_x|^2 + |u_y|^2 \right) dxdy$$

c) Probar que $u|_{\partial \mathbf{D}}$ es un operador continuo de $H^1 (\mathbf{D})$ en $L^2 (\partial \mathbf{D})$.

9. Probar que la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida en $H^1 (a, b)$ como

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \left[f (a) \, g (a) + f (b) \, g (b) \right] + \int_a^b f' (x) \, g' (x) \, dx$$

es un producto interno equivalente al usual.