Ecucaciones Diferenciales - Practica 6

1) Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, probar que:

a) La aplicación $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to R$ dada por $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi$ es una distribución.

b) La aplicación $f \to T_f$ es inyectiva.

c) Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$, entonces $sopf = sopT_f$.

2) Sea H la aplicación definida por

$$H(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Probar que:

a) H pertenece a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

b) No existe $f \in L^1_{loc}$ tal que $H = T_f$.

3) Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$, y sea $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} g(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que $g_\varepsilon \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

4) Sea $u(x) = log|x|$. Probar que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, y calcular u'.

5) a) Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $u' = 0$. Probar que u es constante.

b) Si $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, probar que sus derivadas distribucionales coinciden con las clásicas. Recíprocamente, dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial^\alpha u$ es continua para $|\alpha| \le k$, probar que $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

6) a) Sean $u, v \in D'(\mathbb{R}^n)$, u de soporte compacto. Probar que la aplicación $u * v(\phi) := v(\widetilde{u} * \phi)$ está bien definida, y que $u * v \in \mathcal{D}'(R^n)$.

b) Calcular $\delta * v$.

7) Sea $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Probar que existen $c > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$|u(\phi)| \le c \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

8) Probar que todo polinomio es una distribución temperada, pero e^x no lo es.

9) a) Dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, probar que $u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

b) Dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto, probar que u se extiende a un elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

10) Hallar todas las $u \in \mathcal{D}'(R)$ tales que

$$a) u' = \delta \qquad b) u'' = \delta \qquad c) u' + u = \delta$$