Ecuaciones Diferenciales - Práctica 7

Series de Fourier - Separación de variables

1. Probar que si f es periódica de período l, entonces para $x \in \mathbb{R}$ vale $\int_0^l f(y)dy = \int_x^{x+l} f(y)dy$.

2. Probar que si f, g son periódicas de período l, entonces

$$(f * g)(x) = \int_0^l f(x-y)\, g(y)\, dy$$

también es periódica de período l.

3. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones de $(-\pi, \pi)$

a) $f(x) = sg(x)$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = \pi^2 - x^2$

d) $f(x) = x\left(\pi^2 - x^2\right)$

e) $f(x) = \exp\left(\alpha e^{ix}\right) \qquad \alpha \in \mathbf{C}$.

Sug: Usar la serie de Taylor de $\exp z$ y la unicidad de la serie de Fourier.

3. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in (0, \pi) \\ -\pi - x & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

y hallar $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{k^2}$.

4. Si $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikx}$ calcular la serie de Fourier de

a) $f^*(x) = \overline{f(x)}$

b) $\widetilde{f}(x) = f(-x)$

c) $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$

d) $(\mu_n f)(x) = f(x)\, e^{inx}$

5. Si $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikx}$, escribir la serie de Fourier en la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\right)$$

6. Sea D_n el núcleo de Dirichlet definido por

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{sen(n+\frac{1}{2})x}{sen(\frac{x}{2})}$$

probar que

a) $s_n f = D_n * f$

b) $\|D_n\|_{L^1} = O(\log n)$

7. Sean $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ periódicas, calcular $\widehat{f * g}$.

8. Sea $f \in C^n_{per}[-\pi,\pi]$, probar que para $m = 1, \ldots, n$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (ik)^m \widehat{f}_k e^{ikx}$$

9. Sea $f \in L^2(-\pi,\pi)$ periódica, probar que $f \in H^1(-\pi,\pi)$ si y solamente si $k\widehat{f}_k \in l^2(\mathbf{Z})$.

10. Sea $f \in L^2(-\pi,\pi)$ periódica, se define

$$u(r,\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} r^{|k|} \widehat{f}_k e^{ik\theta}$$

probar que

i) La función u definida en $0 < r < 1$ es armónica (en coordenadas polares).

ii) $u(r,.) \to f$ en L^2 cuando $r \to 1^-$.

iii) Si $P_r(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} r^{|k|} e^{ik\theta}$, vale $P_r(\theta) = \left(1 - r^2\right) / \left(1 + r^2 - 2r\cos\theta\right)$

iv) $u(r,.) = P_r * f$.

11. Sea $f \in L^2(-\pi,\pi)$ periódica tal que $k^s \widehat{f}_k \in l^2(\mathbf{Z})$ con $s > 1/2$ probar que $f \in L^\infty(-\pi,\pi)$.

12. Este ejercicio tiene por objetivo mostrar que existen funciones continuas cuyas series de Fourier no convergen puntualmente. Sea $C_{per}[-\pi,\pi]$ el espacio de funciones continuas de período 2π, se define e_n el funcional lineal dado por $e_n(f) = (s_n f)(0)$. Supongamos que para toda $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$ $(s_n f)(0) \to f(0)$ cuando $n \to \infty$, valdría entonces

i) El conjunto $\{e_n\}_{n \geq 1}$ está puntualmente acotado.

ii) El conjunto $\{e_n\}_{\ n\geq 1}$ está acotado (usar el teorema de Banach-Steinhauss).

iii) Existe $M>0$ tal que para toda $f\in C_{per}[-\pi,\pi]$ y $n\geq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, f(t)\, dt \leq M\,\|f\|_{L^\infty}$$

iv) $\|D_n\|_{L^1}\leq M$

13. Dada $\phi\in C^1[0,1]$ tal que

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx=0, \qquad \int_0^1 \phi(x)\, sen(\pi x)\,dx=0$$

Probar que vale

$$\int_0^1 \phi^2(x)\,dx \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left(\phi'(x)\right)^2 dx$$

determinar si vale la igualdad para alguna función ϕ.

Separación de variables

14. Resolver separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo

$$\begin{cases} \Delta u=0 & (x,y)\in(0,\pi)\times(0,a) \\ u(x,0)=f(x) & \text{para } x\in(0,\pi) \\ u(x,a)=0 & \text{para } x\in(0,\pi) \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0 & \text{para } y\in(0,a) \end{cases}$$

15. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos $(c>0)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 & (x,t)\in(0,l)\times\mathbb{R} \\ u(x,0)=f(x) & x\in(0,l) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0)=g(x) & x\in(0,l) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 & t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

16. Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cu=0 & (x,t)\in(0,l)\times(0,+\infty) \\ u(x,0)=f(x) \quad x\in(0,\pi) \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \quad t\in(0,+\infty) \end{cases}$$

Sug:considerar $v(x,t) = u(x,t)\exp(ct)$.

16. En los ejercicios anteriores imponer condiciones suficientes para que las series obtenidas sean soluciones del problema considerado.

17. Para cada natural n, se define la función

$$f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} sen(nx)$$

i) Resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1) \\ u_n(x,0) = f_n(x) & x \in (0,\pi) \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) \\ u_n(0,y) = u_n(\pi,y) = 0 & y \in (0,1) \end{cases}$$

ii) Mostrar que f_n y todas sus derivadas convergen a 0 en $[0,\pi]$ cuando n tiende a $+\infty$, pero que para todo $y > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(.,y)\|_\infty = +\infty$$

18. Hallar las soluciones de la ecuación de Laplace de la forma $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ en el cilindro $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 < 1, |z| < 1\}$.

19. Hallar las soluciones de la ecuación de Laplace de la forma $u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ en la bola $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.