Ecuaciones Diferenciales - Práctica 8

Obs: la definición de transformada que se usa en esta práctica es:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

1) Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones

i) $\chi_{[a,b]}$

ii) χ_P con $P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$

iii) $\left(1 + x^2\right)^{-1}$

iv) $e^{-|x|}$

2) Probar que para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

i) $\left(\widehat{\tau_h f}\right)(\xi) = e^{ih\xi} \widehat{f}(\xi)$, con $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$.

ii) $\left(\widehat{\delta_a f}\right)(\xi) = a^{-n} \widehat{f}(\xi/a)$ con $(\delta_a f)(x) = f(ax)$.

iii) Si L es el operador diferencial definido por $L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$ con $a_\alpha \in \mathbf{C}$, entonces

$$\left(\widehat{Lf}\right)(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

iv) Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{\left(\widehat{f}\right)}(x) = f(-x)$

3) i) Hallar $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ no nulos tales que $f * g = 0$.

ii) Probar que si $f * f = 0$, entonces $f = 0$.

iii) Probar que no existe $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f * g = g$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

4) Calcular $\widehat{f}$ siendo f

i) $f(x) = e^{-x^2/2}$

ii) $f(x) = sech\left(\sqrt{\pi/2}x\right)$

5) Probar que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ verifica $\widehat{f} = \lambda f$ entonces $\lambda = i^k$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

6) Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ver que existen $r_n \to \infty$ tales que

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{n \to \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{-r_n}^{+r_n} f(x) e^{-i\xi x} dx \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}$$

7) Calcular $\widehat{f}$ siendo $f(x) = senx/x$

Obs: $senx/x \notin L^1(\mathbb{R})$.

8) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $sop(\widehat{f}) \subset [-L, L]$

i) Probar que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

ii) Ver que $s_n(\xi) \to \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $n \to \infty$, siendo

$$s_n(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{|k| \leq n} f(-k\pi/L)\, e^{ik\pi\xi/L} \mathcal{X}_{[-L,L]}(\xi)$$

iii) Obtener la siguiente expresión (teorema de Kotelnikov - Nyqvist)

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k\pi/L) \frac{senL(x - k\pi/L)}{L(x - k\pi/L)}$$

9) Obtener expresiones integrales para las soluciones de

i) Ecuación del calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ii) Ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(.,y) \in L^2 & \text{para todo } y > 0 \end{cases}$$

iii) Ecuación de onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

iv) Ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

v) Ecuación de Airy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En todos los casos se asume que los datos iniciales pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

10) Dados $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\, u(x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

i) Encontrar la transformada de Fourier de: $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ y $u_t(x,t)$

ii) Probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(|u(x,t)|^2 + |u_x(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 \right) dx$$

es constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sug: Usar la igualdad de Parseval.

11) Sea $T_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definida por

$$T_\varepsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon^2 + x^2} \varphi(x)\, dx$$

i) Probar que $T_\varepsilon \to H$ si $\varepsilon \searrow 0$.

ii) Ver que $\widehat{T_\varepsilon}(\xi) = c.sgn(\xi)\, e^{-\varepsilon|\xi|}$.

iii) Calcular $\widehat{H}(\xi)$.

12) Dado el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta^{2k} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

i) Probar que para $t > 0$, existe $P_t \in \mathcal{S}$ tal que

$$u(x,t) = (P_t * u_0)(x)$$

ii) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x)\,dx$

13) Para f continua y acotada en $(0,\infty)$ se define

$$(Lf)(z) = \int_0^\infty f(x)\,e^{-xz}dx \qquad \mathrm{Re}z > 0$$

Probar que

i) $F(z)$ es holomorfa en $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}z > 0\}$.

ii) Para todo $x > 0$ vale

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} (Lf)(\eta + i\xi)\,e^{x(\eta+i\xi)}d\xi \qquad \eta > 0$$