Ecuaciones Diferenciales - Practica 9

1) Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones armónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u_n \to u$ uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset \Omega$. Probar que u es armónica.

2) Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armónica y acotada. Probar que u es constante.

3) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$. Probar que

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

4) Dada $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, u se dice subarmónica si para toda bola $\overline{B} \subset \Omega$ y toda h armónica tal que $u \leq h$ en ∂B vale que $u \leq h$ en B. Probar que u es subarmónica si y sólo si $\Delta u \geq 0$.

5) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armónica. Probar que

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \sup_{x \in \partial\Omega} |u(x)|$$

6) Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^2 / a < \|x\| < b\}$, y sea $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ armónica. Dado $a \leq r \leq b$ se define $M(r) = \sup_{\|x\|=r} |u(x)|$. Probar que

$$M(r) \leq \sigma M(a) + (1 - \sigma) M(b)$$

para $\sigma = (\log b - \log r)/(\log b - \log a)$.

Sugerencia: usar que $log\|x\|$ es armónica en D, y el principio del máximo.

7) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica. Dado $x \in \Omega$ tal que $B = B_R(x) \subset \Omega$, probar que

$$|\partial_i u(x)| \leq \frac{n}{R} \|u|_{\partial B}\|_\infty$$

Sug: observar que si u es armónica entonces ∇u es armónica.

8) Sea $\Omega \subset C$ un abierto simplemente conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función C^2. Probar que u es armónica si y sólo si existe una función f holomorfa en Ω tal que $u = \mathrm{Re}(f)$. ¿ qué sucede si Ω no es simplemente conexo ?

9) Mostrar que $(4\pi|x|)^{-1}e^{-c|x|}$ es una solución fundamental para el operador $-\Delta+c^2$ en $\mathbb{R}^3$.

10) Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones armónicas en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u_n \to u$ en $L^2(\Omega)$. Probar que u es igual en casi todo punto a una función armónica.

11) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Probar que si $u \in C^2(\Omega)$ es subarmónica, y $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$ entonces

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx$$

Recíprocamente, probar que esta propiedad caracteriza a las funciones subarmónicas.

12) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Probar que si $u \in H_0^1(\Omega)$ minimiza el cociente

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}$$

entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $-\Delta u + \lambda u = 0$,

Una pregunta para pensar: ¿ Qué se puede decir de las autofunciones y autovalores de este problema de Sturm-Liouville ? ¿ Cuáles son los autovalores y las autofunciones si $\Omega = [0,1] \times [0,1]$?