Problemas de contorno para la ecuacion de segundo orden

Consideramos una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden

$$y'' + p_1(t)\, y' + p_2(t)\, y = p_3(t) \qquad (1)$$

$t \in [a,b]$; $p_1, p_2, p_3 \in C[a,b]$

buscamos una solución $y = y(t)$ definida en $[a,b]$ que satisfaga alguna de las siguientes condiciones

- Dirichlet: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$
- Newman: $y'(a) = \alpha$, $y'(b) = \beta$
- Períodica: $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$

Llamemos $p(t) = \exp\left(\int p_1(x)\, dx \right)$

($\int a(x)\, dx$ significa una primitiva de a)

$q(t) = -\, p_2(t)\, p(t)$

$r(t) = -\, p_3(t)\, p(t)$

veamos que la ecuación (1) se puede escribir:

$$-\frac{d}{dt}\left[p(t) \ \frac{dy}{dt} \right] + q(t).y = r(t) \qquad (2)$$

en efecto desarrollando (2)

$-\, p'\, y' - p\, y'' + q\, y = r$

pero $p'(t) = \exp\left(\int p_1(x)\, dx \right) a(t) \ = p(t).p_1(t)$

queda: $-\, p\, p_1\, y' - p\, y'' - p\, p_2\, y = -\, p\, p_3$

dividiendo por p ($p(t) > 0$) queda

$-\, p_1\, y' - y'' - p_2\, y = -\, p_3$

esto muestra que las soluciones de (1) y (2) son las mismas.

(2) se llama la forma divergencia

<u>Obs:</u> $p(t) > 0$ y $p \in C^1[a,b]$

Si tengo una ecuación de la forma (2):

Si $p(t) > 0$ el problema se llama regular

Si $p(t) > 0$ salvo en finitos puntos se llama singular

<u>Ejemplos:</u> 1) $p = 1$, $q = 0$ queda $y'' = -r$

<u>2)</u> Ecuación de Legendre

$(1 - t^2)\, y'' - 2t\, y' + \lambda\, y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ en $[-1,1]$

$1 - t^2 \neq 0$ salvo en ± 1 (es singular) en efecto para llevarla a la forma (1) hay que dividir por $1-t^2$

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}\, y' + \frac{\lambda}{1-t^2}\, y = 0$$

al hacer $p(t) = \exp\left(\int -\frac{2t}{1-t^2}\,dt\right) = \exp\left(\int \frac{du}{u}\right) = \exp(\log u) = u =$

$= 1-t^2$ (poniendo $u = 1-t^2$) $q(t) = -\lambda$

y queda finalmente:

$$-\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dy}{dt}\right] - \lambda y = 0$$

(aparece al hacer separación de variables en $\Delta u = \lambda u$ en esféricas)

3) Ecuación de Bessel:

$t^2 y'' + t\, y' + (t^2 - \nu^2)\, y = 0$

$(t \geqslant 0)$ $(\nu \in \mathbb{R})$

(aparece al hacer separación de variables en Δu en cilíndricas)

Problema de Dirichlet:

con las hipótesis $p \in C^1[a,b]$, $q \in C^2[a,b]$ defino el operador

$$L(y) = (-py')' + qy$$

$L : C^2[a,b] \to C[a,b]$

considero el problema con condiciones de Dirichlet

$$\begin{cases} L(y) = r \text{ en } (a,b) \\ y(a) = \alpha \ , \ y(b) = \beta \end{cases}$$

tomemos el operador L actuando en el sub-espacio

$C^2_0\,[a,b] = \{\ y \in C^2[a,b] \ : \ y(a) = y(b) = 0\ \}$

(si tuvieramos el problema con condiciones de Neuman consideramos el sub-espacio $C^2_{,0}\,[a,b] = \{\ y \in C^2[a,b] \ : \ y'(a) = y'(b) = 0\ \}$,
si tuvieramos condiciones períodicas
$C^2_{per}[a,b] = \{\ y \in C^2[a,b] \ : \ y(a) = y(b) \ ; \ y'(a) = y'(b)\ \}$)

Vamos a ver que L restringido al subespacio $C^2_0[a,b]$ (o $C^2_{,0}$; C^2_{per} es autoadjunto (para el producto interno de la integral) esto resultará inmediatamente de la

<u>Formula de Green:</u> Si $y,z \in C^2[a,b]$

$$\int_a^b [\ L(y)\ z - L(z)\ y\ ]\ dt = -\ p(y'z - z'y)\ \Big|_a^b$$

<u>Dem:</u>

$$\int_a^b L(y)\ z\ dt - L(z)\ y\ dt =$$

$$= \int_a^b (-py')'\ z + qy\ z - [-\ (pz')'\ y + qzy\ ]\ \ dt =$$

$$= \int_a^b (-py')'\ z + (pz')'\ y\ dt$$

integrando por partes:

$$= \int_a^b py'z' - p\ z'y'\ dt + (-py')z + pz'y\ \Big|_a^b =$$

$$= 0 + -p\ (y'z - z'y)\ \Big|_a^b = -p\ (y'z - z'y)\ \Big|_a^b$$

<u>Teorema de la alternativa:</u>

i) Supongamos que el problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad (H)$$

tiene como única solución $y = 0$ en este caso el problema de Dirichlet no homogéneo

$$\begin{cases} L(y) = r \\ y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta \end{cases} \qquad (NH)$$

tiene solución única

ii) Si el problema de Dirichlet homogéneo (H) tiene una solución no nula entonces pueden ocurrir dos cosas:

- el no homogéneo (NH) no tiene solución
- o bien tiene infinitas soluciones

<u>Dem:</u> Sean y_1, y_2 dos soluciones linealmente independientes de $L(y) = 0$ propongo una solución particular de la forma

$y_p(t) = c_1(t).y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$

(variación de parámetros) y reemplazo en la ecuación:

$L(y) = (-py')' + qy = - p y'' - p' y' + qy$

$L(y_p) = L(c_1y_1 + c_2y_2) =$

$= - p (c_1'' y_1 + 2 c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2'' y_2 + 2 c_2' y_2' + c_2 y_2'')$

$- p' (c_1' y_1 + c_2' y_1 + c_1 y_1' + c_2 y_2') + q (c_1y_1 + c_2y_2) =$

$= - p (c_1'' y_1 + 2 c_1' y_1' + c_2'' y_2 + 2 c_2' y_2') - p'(c_1' y_1 + c_2' y_1) = r$

(usando que y_1,y_2 son soluciones de $L(y) = 0$

pido que $c_1' y_1 + c_2' y_1 = 0$ con lo que queda

$- p (c_1'' y_1 + 2 c_1' y_1' + c_2'' y_2 + 2 c_2' y_2') = r \quad (*)$

derivando la condición $c_1' y_1 + c_2' y_1 = 0$ tenemos

$c_1'' y_1 + c_1 y_2' + c_2'' y_2 + c_2' y_2' = 0$

de donde (*) se transforma en

$- p (- c_1' y_1' - c_2' y_2' + 2 c_1' y_1' + 2 c_2' y_2') = r$

$- p (c_1' y_1' + c_2' y_2') = r$

volviendo a poner $p_3 = - r/p$ tenemos que c_1', c_2' son las soluciones del sistema lineal

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_3 = p_3 \end{cases}$$

El determinante del sistema es el wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

derivando W obtenemos

$$W' = \begin{vmatrix} y_1' & y_1' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ - p_1y_1' - p_2y_1 & - p_2y_2' - p_3y_2 \end{vmatrix} = - aW$$

de donde $W = \overline{W}\, e^{- \int a(x)\, dx} = \dfrac{\overline{W}}{p}$ con $\overline{W} = p\, W$ constante

$k \neq 0$ pues y_1,y_2 son l.i.

Resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$c'_1 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ p_3 & y'_2 \end{vmatrix} = \frac{p}{\overline{W}}(-p_3\ y_2) = \frac{1}{\overline{W}}\ r\ y_2$$

$$c'_2 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & p_3 \end{vmatrix} = \frac{p}{\overline{W}}\ (p_3\ y_1) = -\frac{1}{\overline{W}}\ r\ y_1$$

tomamos pues:

$$c_1(t) = \frac{1}{\overline{W}}\int_a^t r(\tau)\ y_2(\tau)\ d\tau$$

$$c_2(t) = -\frac{1}{\overline{W}}\int_a^t r(\tau)\ y_1(\tau)\ d\tau$$

con estos valores de c_1 y c_2 se obtiene una solución particular.
Notemos que $c_1(a) = c_2(a) = 0$
La solución general de $L(y) = r$ será:

$$y = d_1\ y_1 + d_2\ y_2 + y_p = (c_1 + d_1)y_1 + (c_2 + d_2)y_2 = \overline{c}_1\ y_1 + \overline{c}_2\ y_2$$

con d_1, d_2 dos constantes a determinar (usando las condiciones de contorno)
quedan las condiciones

$y(a) = d_1\ y_1(a) + d_2\ y_2(a) = \alpha$ [pues $c_1(a) = c_2(a) = 0$]

$y(b) = (c_1(b) + d_1)y_1(b) + (c_2(b) + d_2)y_2(b) = \beta$

o sea que d_1, d_2 deben ser las soluciones del sistema lineal:

$$\begin{cases} d_1\ y_1(a) + d_2\ y_2(a) = 0 \\ d_1\ y_1(b) + d_2\ y_2(b) = \beta - c_1(b)\ y_1(b) - c_2(b)\ y_2(b) = k \end{cases}$$

$$\text{donde } k = \beta + \frac{1}{\overline{W}}\left[\left(\int_a^b r(\tau)\ y_2(\tau)\ d\tau\right) y_1(b) - \left(\int_a^b r(\tau)\ y_1(\tau)\ d\tau\right) y_2(b)\right]$$

la matriz del sistema es: $\begin{bmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{bmatrix}$

Veamos cuál es la condición para que exista una solución no nula del problema homogéneo: $y = k_1 y_1 + k_2 y_2$

$$\begin{cases} y(a) = k_1\ y_1(a) + k_2\ y_2(a) = 0 \\ y(b) = k_1\ y_1(b) + k_2\ y_2(b) = 0 \end{cases}$$

este es un sistema homogéneo con la misma matriz que antes

si el sistema lineal homogéneo tiene solución única $\Rightarrow$ el determinante es distinto de cero $\Rightarrow$ el sistema lineal no homogéneo tiene siempre solución única

Al revés si el sistema homogéneo tiene solución no trivial $\Rightarrow$ el determinante es cero $\Rightarrow$ el sistema no homogéneo o bien no tiene solución o bien tiene infinitas

Obs: El teorema vale con las hipótesis $p \in C^1[a,b]$ $p > 0$ en (a,b) (puede anularse sólo en a o en b) $q, r \in C[a,b]$

Obs: Se puede hacer lo mismo para condiciones de Newman o del tipo direccional

$\alpha_1\ y(a) + \alpha_2\ y'(a) = \alpha$

$\beta_1\ y(b) + \beta_2\ y'(b) = \beta$

Teorema: Supongamos que el problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad (H)$$

tiene una solución $\tilde{y} \neq 0$

Entonces el problema de Dirichlet no homogéneo:

$$\begin{cases} L(y) = r \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad (NH)$$

tiene infinitas soluciones $\Leftrightarrow$ tiene una solución $\Leftrightarrow$ $r \perp \tilde{y}$

es decir $\displaystyle\int_a^b r(t)\ \tilde{y}(t)\ dt = 0$

Dem: Supongamos que tenemos una solución $y_1 = \tilde{y}$ de $L(y) = 0$

Nu(L) tiene dimensión 2. Completamos a una base agregando otra solución y_2 linealmente indpendiente con y_1

Utilicemos las cuentas de la demostración del teorema anterior:

(y_2 no tiene porqué cumplir la condición de contorno)

$y(a) = d_1\ y_1(a) + d_2\ y_2(a) = d_2\ y_2(a) = 0$

$$W(a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = - y_2(a)\, y_1'(a)$$

como $W(x) \neq 0 \;\forall\; x \in [a,b] \Rightarrow y_2(a) \neq 0 \Rightarrow$ debe ser $d_2 = 0$

$$d_1\, y_1(b) + d_2\, y_2(b) = d_1\, y_1(b) = k = \left(\int_a^b r(\tau)\, y_1(\tau)\, d\tau \right) y_2(b)$$

por el mismo razonamiento de antes $W(b) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(b) \\ y_1'(b) & y_2'(b) \end{vmatrix} = - y_2(b).y_1'(b) \neq$

$\Rightarrow y_2(b) \neq 0$ entonces $\int_a^b r(\tau)\, y_1(\tau)\, d\tau = 0$

(si hay solución del problema no homogéneo $y_1 \perp r$)

Al revés si la integral es 0 $\Rightarrow d_1$ puede ser cualquiera y encontramos infinitas soluciones .