METODO DE SUPER Y SUB-SOLUCIONES

Consideremos el problema

$$(1) \begin{cases} \Delta u = f(x,u) & \text{en} \quad \Omega \\ u = g & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Por simplicidad, suponemos que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ con $\frac{\partial f}{\partial u}$ continua y $g \in C^2(\overline{\Omega})$.

TEOREMA

Supongamos que existen α, $\beta \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tales que* $\alpha \leq \beta$, *y además*

$$\Delta\alpha \geq f(x,\alpha), \qquad \Delta\beta \leq f(x,\beta) \quad \textit{en} \quad \Omega$$

$$\alpha \leq g \leq \beta \quad \textit{en} \quad \partial\Omega$$

Entonces existe u *solución clásica de (1), con* $\alpha \leq u \leq \beta$.

Demostración

Sea

$$c = \sup_{x\in\overline{\Omega}, \alpha(x)\leq u\leq\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)$$

Consideremos la sucesión definida recursivamente por:

$u_0 = \alpha$;

u_{n+1} la única solución del problema lineal

$$\begin{cases} \Delta u_{n+1} - cu_{n+1} = f(x,u_n) - cu_n & \text{en} \quad \Omega \\ u_{n+1} = g & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Notemos que para cada x fijo la función $f(x,u) - cu$ es decreciente en u, pues su derivada es $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) - c \leq 0$. Se cumple que

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq \beta$$

En efecto, observemos que

$$\Delta u_1 - cu_1 = f(x,\alpha) - c\alpha \leq \Delta\alpha - c\alpha$$

de donde se deduce que

$$\Delta(u_1-\alpha)-c(u_1-\alpha)\leq 0$$

Siendo $u_1-\alpha|_{\partial\Omega}\geq 0$, por el principio del mínimo resulta $u_1-\alpha\geq 0$, es decir: $u_1\geq\alpha$. Por otra parte,

$$\Delta u_1-cu_1=f(x,\alpha)-c\alpha\geq f(x,\beta)-c\beta\geq\Delta\beta-c\beta,$$

y siendo $u_1-\beta|_{\partial\Omega}\leq 0$ vale que $u_1\leq\beta$.

Asumamos como hipótesis inductiva que $u_{n-1}\leq u_n\leq\beta$, entonces:

$$\Delta u_{n+1}-cu_{n+1}=f(x,u_n)-cu_n\leq f(x,u_{n-1})-cu_{n-1}=\Delta u_n-cu_n$$

y siendo $u_{n+1}-u_n=0$ en $\partial\Omega$ se deduce que $u_{n+1}\geq u_n$. Del mismo modo,

$$\Delta u_{n+1}-cu_{n+1}=f(x,u_n)-cu_n\geq f(x,\beta)-c\beta,$$

y siendo $u_{n+1}-\beta|_{\partial\Omega}\leq 0$ vale que $u_{n+1}\leq\beta$.

Luego, existe una función u tal que $u_n(x)\to u(x)$ puntualmente. Por otro lado, vale el siguiente

LEMA

Existe una constante K tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}\leq K\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

para toda $u\in H^2\cap H^1_0(\Omega)$.

<u>*dem:*</u> ejercicio.

Luego:

$$\|u_{n+1}-g\|_{H^2(\Omega)}\leq K\|\Delta(u_{n+1}-g)\|_{L^2(\Omega)}=K\|f(\cdot,u_n)+c(u_{n+1}-u_n)-\Delta g\|_{L^2(\Omega)}\leq M$$

para cierta constante M (notar que $\{u_n\}$ está acotada para $\|\cdot\|_\infty$ porque $\alpha\leq u_n\leq\beta$). Es decir, $\{u_n\}$ está acotada en $H^2(\Omega)$, que está sumergido en $H^1(\Omega)$ en forma compacta. Entonces existe $\{u_{n_j}\}$ convergente en $H^1(\Omega)$, y es fácil ver que el límite de esta subsucesión es u. Se deduce que $u\in H^1(\Omega)$. Por otro lado, para $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ vale que

$$\int_\Omega u_{n+1}\Delta\phi=\int_\Omega\Delta u_{n+1}\phi=\int_\Omega[c(u_{n+1}-u_n)+f(x,u_n)]\phi\to\int_\Omega f(x,u)\phi$$

y también

$$\int_\Omega u_{n_j}\Delta\phi \to \int_\Omega u\Delta\phi$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega u\Delta\phi = \int_\Omega f(x,u)\phi,$$

lo que prueba que $\Delta u = \phi$.

Notar que en principio resulta que u es solución débil, pero se puede probar que es clásica.