Transformada de Fourier

1- Definicion de la transformada de Fourier

Def.: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformada de fourier por

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix.\xi}\, dx$$

donde $x.\xi$ significa el producto escalar

Obs: tenemos la obvia pero importante estimación $\| \hat{f} \|_\infty \leqslant (2\pi)^{-n/2} \| f \|_1$

Designemos por $\mathcal{F}$ el operador transformada de Fourier

Así $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R})$ es un operador lineal acotado

Teorema: Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$

Dem: Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dado $\varepsilon > 0$ encontraremos un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal

$$\int_{|x| \geqslant \eta} |f(x)|\, dx < \varepsilon$$

Por la continuidad de $e^{-i.z}$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si
$|z| < \delta \Rightarrow |e^{-iz} - 1| < \varepsilon$

tomemos h tal que $\| h \| \leqslant \dfrac{\delta}{\eta}$ (que depende de ε pero no de ξ)

Por Cauchy-schwarz si $\| x \| < \eta \Rightarrow | x.h | \leqslant \| x \|.\| h \| \leqslant \eta \| h \| < \delta$
$\Rightarrow |e^{-ix.h} - 1| < \varepsilon$

y entonces resulta que:

$$|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| =$$

$$= |(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix.(\xi+h)}\, dx - (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix.\xi}\, dx\, |$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\, (e^{-ix.(\xi+h)} - e^{-ix.\xi})|\, dx$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\, f(x)\, e^{-ix.\xi}\, (e^{-ix.h} - 1)|\, dx$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|.|\, e^{-ix.h} - 1|\, dx$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \Big[\int_{\| x \| \geqslant \eta} |f(x)|.|\, e^{-ix.h} - 1|\, dx +$$

$$\int_{\| x \| < \eta} |f(x)|.| e^{-ix.h} - 1| \, dx \Big]$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \Big[2 \int_{\| x \| \geqslant \eta} |f(x)| \, dx + \varepsilon \int_{\| x \| < \eta} |f(x)| \, dx \Big]$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \; (2 \, \varepsilon + \varepsilon \, \| f \|_1) = C \, \varepsilon$$

con C una constante (depende de f pero no de ε).Esto prueba que $\hat{f}$ es uniformemente continua.

2- La transformada de fourier y las derivadas:

El siguiente teorema permite calcular la transformada de fourier de una derivada:

Teorema: Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

ii) $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$

entonces $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \right)^{\wedge}(\xi) = i \, \xi_j \, \hat{f}(\xi)$

Dem: Integrando por partes se tiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^{\wedge}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, e^{-i.x.\xi} \, dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \Big[f(x) \, e^{-i.x.\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, (-i\xi_j).e^{-i.x.\xi} \, dx \Big] =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \, i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x_j) \, e^{-i.x.\xi} \, dx = i \, \xi_j \, \hat{f}(\xi)$$

Corolario: Supongamos que $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ es tal qye

i) $D^{\beta} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\beta| \leqslant k$ (en particular $D^0 f = f \in L^1$)

ii) $D^{\beta} f(x) \to 0$ para $\beta < k$

y que α es un multi-índice tal que $|\alpha| = k$ entonces

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

(por inducción en k)

<u>Caso particular:</u>

tomemos $\alpha = (0,0,\ldots,0,\underset{j}{2},0,\ldots,0)$ queda $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)^\wedge(\xi) = -\xi_j^2 \hat{f}(\xi)$

entonces tenemos que $(\Delta f)^\wedge(\xi) = -|\xi|^2 \hat{f}(\xi)$

El siguiente resultado se refiere a las derivadas de la transformada de Fourier

<u>Lema:</u> (derivación bajo el signo de integral)

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y sea $g: U \times V \to \mathbb{R}$ derivable respecto de ξ_j tal que $\left|\dfrac{\partial g}{\partial \xi_j}(x,\xi)\right| \leqslant h(x)$ $\forall$ donde $h(x) \in L^1(U)$

y sea $F: V \to \mathbb{R}$ dada por $F(\xi) = \int_U g(x,\xi)\, dx$

entonces $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j}(\xi) = \int_U \dfrac{\partial g}{\partial \xi_j}(x,\xi)\, dx$

<u>Dem:</u> Sea $\xi \in V$ si $h \neq 0$ es suficientemente pequeño tenemos

$$\frac{F(\xi+h.e_j) - F(h)}{h} = \int_U \left[\frac{g(x,\xi+h.e_j) - g(x,\xi)}{h}\right] dx$$

ahora por definición se tiene en cada punto

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x,\xi+h.e_j) - g(x,\xi)}{h} = \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x,\xi)$$

por otra parte por el teorema del valor medio:

$$\left|\frac{g(x,\xi+h.e_j) - g(x,\xi)}{h}\right| = \left|\frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x,\xi+\theta e_j)\right| \leqslant h(x)$$

y como h es integrable por convergencia mayorada

$$\lim_{h \to 0} \int_U \left[\frac{g(x,\xi+h.e_j) - g(x,\xi)}{h} \right] dx = \int_U \frac{\partial g}{\partial \xi_j} (x,\xi)\, dx$$

por lo tanto $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j} (\xi) = \displaystyle\int_U \frac{\partial g}{\partial \xi_j} (x,\xi)\, dx$

<u>Teorema:</u> Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f}$ es derivable respecto de ξ_j y se tiene $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} (\xi) = ((-ix_j).f)\hat{\ }(\xi)$

<u>Dem:</u> Aplicamos el lema anterior a $g(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} f(x)\, e^{-ix.\xi}$ (con $U = V = \mathbb{R}^n$)

$\dfrac{\partial g}{\partial \xi_j} = (2\pi)^{-n/2} (-ix_j)\, f(x)\, e^{-ix.\xi}$ de donde

$\left| \dfrac{\partial g}{\partial \xi_j} \right| \leqslant (2\pi)^{-n/2} |x_j\, f(x)|$ que por hipótesis es integrable

por lo tanto

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} (\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j)\, f(x)\, e^{-ix.\xi}$$

<u>Corolario:</u> Supongamos que α es un multíndice $|\alpha| = k$ y que $x^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo β con $|\beta| \leqslant k$ entonces $(D^\beta \hat{f})(\xi) = ((-ix_j)^\alpha f)\hat{\ }(\xi)$

<u>3- La formula de inversion</u>

<u>Lema 1:</u> Sean $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$(f * \hat{g})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, g(y)\, e^{-ix.y}\, dy$$

<u>Dem:</u> $(f * \hat{g})(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, \hat{g}(x-t)\, dt$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, e^{-i(x-t).y}\, dy \right] dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} f(t)\, g(y)\, e^{-ix.y}\, e^{-it.y}\, dy\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \; e^{-it.y} \, dt \right] e^{-ix.y} \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \; \hat{f}(y) \, e^{-ix.y} \, dy$$

<u>Caso particular:</u> si $x = 0$ obtenemos la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t) \, \hat{g}(-t) \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \, g(y) \, dy$$

o sea $< f, (\hat{g})^{\sim} > = < \hat{f}, g >$ para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

<u>Lema 2:</u> (efecto de una dilatación sobre la transformada de Fourier)

Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$ $\quad (\delta_\varepsilon g)\hat{}(\xi) = \varepsilon^{-n} \, \hat{g}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon} \right) = \hat{g}_\varepsilon(\xi)$

(donde f_ε significa la aproximación de la identidad $f(x) = \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$ obtenida a partir de f)

<u>Dem:</u> haciendo el cambio de variable $y = \varepsilon.x \Rightarrow dy = \varepsilon^n \, dx$
(ε^n es el jacobiano)

$$(\delta_\varepsilon g)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon x) \, e^{-ix.\xi} \, dx = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \, e^{-i(x/\varepsilon).\xi} \, dy$$

$$= \varepsilon^{-n} \, \hat{g}\left(\frac{\xi}{\varepsilon} \right)$$

<u>Lema 3:</u> Si $g(x) = e^{-\| x \|^2/2} \Rightarrow \hat{g}(x) = g(x)$

<u>Dem:</u> por medio del siguiente lema se reduce inmediatamente al caso $n = 1$

$g(x) = e^{-x^2/2}$

$g(0) = 1$

$g'(x) = -x \, e^{-x^2/2} = -x \, g$

por otra parte

$(\hat{g})'(\xi) = (-i \; x \; g)\hat{}(\xi) = i \; (g')\hat{}(\xi) = - \xi \; g\hat{}(\xi)$

así pues $\hat{g}$ es otra solución de la misma ecuación diferencial $g' = - x \, g$

además $\hat{g}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, dx = 1$ (distribución normal de probabilidad) por la unicidad de la solución $g = \hat{g}$

<u>Lema</u> <u>4:</u> Si $f(x) = f_1(x_1).f_2(x_2)...f_n(x_n)$ (con $f_1, f_2, ..., f_n \in L^1(\mathbb{R})$)
entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1).\hat{f}_2(\xi_2)... \hat{f}_n(\xi_n)$

<u>Dem:</u> es inmediata por el teorema de Fubini

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix.\xi}\, dx = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x_j)\, e^{-ix_j.\xi_j}\, dx_j$$

$$= \hat{f}_1(\xi_1).\hat{f}_2(\xi_2)... \hat{f}_n(\xi_n)$$

<u>Teorema</u> <u>(Formula</u> <u>de</u> <u>inversion):</u> Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces se verifica que

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{-ix.y}\, dy$$

en casi todo punto

<u>Dem:</u> Eligiendo $g(x) = (2\pi)^{-n/2}\, e^{-\| x \|^2/2}$ de modo que $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx = 1$

$(f * g_\varepsilon)(x) = (f * \hat{g}_\varepsilon)(x)$ por el lema 3

$= (f * (\delta_\varepsilon g)\hat{})(x)$ por el lema 2

$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, g(\varepsilon y)\, e^{-ix.y}\, dy$ por el lema 1

ahora cuando $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, g(\varepsilon y)\, e^{-ix.y}\, dy \to \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, g(0)\, e^{-ix.y}\, dy$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{-ix.y}\, dy$$

por convergencia mayorada (ya que estamos suponiendo que $\hat{f}$ es integrable y g es acotada)

Ahora justamente como $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx = 1$ se tiene que
$f * g_\varepsilon \to f$ en L^1 [1] con lo que

[1] Wheeden & Zygmund Teorema 9.6 pag. 148

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{-ix.y}\, dy \quad (*)$$

como funciones de L^1 (es decir en casi todo punto)

Obs 1: Se puede ver que la fórmula (*) vale en cada punto de continuidad de f, y más aún en todo punto de Lebesgue de f[2]

Def.: Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la anti-transformada de Fourier por

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, e^{ix.\xi}\, d\xi$$

la fórmula de inversión afirma que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $(\hat{f})^{\vee} = f$

Claramente las propiedades de la anti-transformada son análogas a las de la transformada.

Obs 2: el lema 1 dice que $f * \hat{g} = (f * \hat{g})^{\vee}$

Obs 3: Designemos por $\tilde{f}$ la reflejada de f dada por $\tilde{f}(x) = f(-x)$

$$(\tilde{f})^{\vee}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\, e^{ix.\xi}\, dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-iy.\xi}\, dx = \hat{f}(\xi)$$

la fórmula de inversión afirma pues que $(\hat{f})^{\wedge} = \tilde{f}$ siempre que f y $\hat{f}$ estén en $L^1(\mathbb{R}^n)$

En particular $\mathcal{F}^4 = Id \Rightarrow$ los únicos posibles autovalores de la transformada de Fourier son $\{ \pm 1, \pm i \}$

Obs 4: por la fórmula de inversión si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que en particular que $\| f \|_{\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \| \hat{f} \|_1$ de modo que $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

Corolario 1: Supongamos que $f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

En la fórmula del lema 1

$$< f, (\hat{g})^{\sim} > = < \hat{f}, g >$$

pongamos $g = \hat{h} \Rightarrow \hat{g} = \tilde{h}$ por la fórmula de inversión queda:

[2] Wheeden & Zygmund ejemplo 9.12 pag. 152 teoremas 9.9 y 9.13

$< f,h > = < \hat{f},\hat{h} >$ (Teorema de Plancherel)

Obs 5: En general es falso que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$
por ejemplo $f = \chi_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ix.\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-ix.\xi}}{-i\xi} \right|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia.\xi} - e^{ia.\xi}}{i\ \xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } (a.\xi)}{\xi}$$

que no pertenece a $L^1(\mathbb{R})$

4- El espacio de Schwarz:
Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ C^\infty$ tales que $\forall \alpha,\beta$ multíndices $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f| < +\infty \}$
los elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se llaman funciones rapidamente decrecientes en ∞
La familia de seminormas:

$$\| f \|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f|$$

hace de $S(\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial topológico localemente convexo

Obs: Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ y $p \in \mathbb{R}[X]$ es un polinomio $p.f \in S(\mathbb{R}^n)$
Si α es un multiíndice y $f \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n)$

Obs: Si $f \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo p
de hecho encontramos M tal que

$|x_i^2\ f(x)| \leqslant M$ para $i = 1,2,...,n$

$|(x_1^2 + x_2^2 + \ ...\ + x_n^2)\ f(x)\ | \leqslant M.n$

o sea $|f(x)\ | \leqslant \dfrac{M.n}{|x|^2}$

en particular $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$

más generalmente: dado $k \in \mathbb{N}$ encontramos una constante C tal que

$|(x_1^2 + x_2^2 + \ ...\ + x_n^2)^k\ f(x)\ | \leqslant C$
por lo que

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{2k}}$$

$$\int_{\| x \| > 1} |f(x)|^p \, dx \leqslant \int_{\| x \| > 1} \frac{C^p}{|x|^{2kp}} \, dx =$$

$$= C^p \int_1^{+\infty} r^{-2kp} \, r^{n-1} \, dr < +\infty$$

si $n-2kp < 0$,o sea si $n < 2kp$,o $k > \frac{n}{2p}$

Esto muetra que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p$

Los resultados anteriores implican el siguiente resultado:

Teorema: La transformada de Fourier aplica $S(\mathbb{R}^n)$ biyectivamente sobre si mismo y si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\forall$ α multi-índice

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

5- La transformada de Fourier en L^2: Teorema de Plancherel

En particular Si $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la igualdad de Plancherel

$< f,g > = < \hat{f},\hat{g} >$

y por lo tanto $\| f \|_2 = \| \hat{f} \|_2$ (tomando $f = g$)

como $\mathcal{S}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos extender por continuidad la transformada d
Fourier a un operador $\mathcal{F}:L^2 \to L^2$
la igualdades

1) $< f,g > = < \hat{f},\hat{g} >$

2) $\| f \|_2 = \| \hat{f} \|_2$

se verificará entonces $\forall$ $f,g \in L^2$

Análogamente podemos extender la anti-transformada, con lo que se ve que $\mathcal{F}:L^2 \to L^2$ resulta un isomorfismo unitario

¿ Cómo puede calcularse la transformada (o la anti-transformada) de una función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

tomemos un $r > 0$ y sea $g_r = f\, \chi_{B(0,r)}$

tenemos que $g_r \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y que $g \to f$ en L^2 cuando $r \to \infty$

de hecho

$\| f - g_r \|_2^2 = \int_{\| x \| > r} |f(x)|^2\, dx \to 0$ cuando $r \to \infty$ pues $f \in L^2$

$\Rightarrow \| \hat{f} - \hat{g}_r \|_2 \to 0$ en L^2 , es decir:

$\hat{g}_r(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{B(0,r)} f(x)\, e^{-ix.\xi}\, dx \to \hat{f}(\xi)$ en L^2 cuando $r \to \infty$

Esto permite calcular $\hat{f}$ si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

7- Aplicacion: ecuacion del calor

Consideremos el problema:

encontrar una función $u = u(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tal que

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u \text{ para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

apliquemos la transformada de Fourier en x, o sea introduzcamos la función:

$$\hat{u}(\xi,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, e^{-i\xi.x}\, dx$$

(operamos formalmente ,suponiendo p.ej. que $u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$)

como transformamos solamente en x encontramos que:

$$(u_t)\hat{}(\xi,t) = (\hat{u})_t\,(\xi,t)$$

(derivando bajo el signo de integral) mientras que:

$$(\Delta_x u)\hat{}(\xi,t) = -|\xi|^2\, \hat{u}(\xi,t)$$

por lo que obtenemos para cada ξ un problema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{cases} (\hat{u})_t\,(\xi,t) = -\,|\xi|^2\, \hat{u}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

con lo que resulta:

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi|^2 t}$$

queremos hallar su anti-transformada de Fourier

$$g_t(\xi) = e^{-|\xi|^2 t} = e^{-|\lambda\xi|^2/2} \quad \text{con } \lambda = \sqrt{2t}$$

$$= \delta_\lambda\, g \text{ siendo } g(\xi) = e^{-|\xi|^2/2} \Rightarrow \check{g} = g$$

$$g_t(\xi)^{\vee} = \lambda^{-n}\, \check{g}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{1}{(2t)^{-n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)}$$

como $(f * g)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}.\hat{g}$

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi|^2 t} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = (f * K_t)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{-n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z-x)\, e^{-|x|^2/(4t)}\, dz$$

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{-n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} \quad \text{(núcleo del calor)}$$

pongamos $\varepsilon = \sqrt{t}$

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi)^{-n/2}}\, \varepsilon^{-n}\, e^{-|x/\varepsilon|^2/4}$$

$\Rightarrow K_t$ es una aproximación de la identidad

<u>Teorema:</u> Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{-n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z-x)\, e^{-|x|^2/(4t)}\, dz$$

es C^∞ en $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ es una solución de $u_t = \Delta_x u$

si $p < \infty \Rightarrow u(\_,t) \to f$ en L^p cuando $t \to 0$

si f es acotada y continua $\Rightarrow u$ es continua en $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$ y $u(x,0) = f(x)$