ECUACIONES DIFERENCIALES
PRACTICA 0
Primer cuatrimestre 2004

Repaso de Resultados Básicos

Ejercicio 1. Revisar los siguientes teoremas
i) Teorema de convergencia mon'otona de Beppo-Levi.
ii) Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
iii) Lema de Fatou.

Ejercicio 2. Diferenciaci'on bajo el signo integral.
Sea $U \subset R^n$ medible, $x_0 \in R^n$. Si $f(x,.) \in L^1(U)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$ y $g \in L^1(U)$ es tal que

$$|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)| \leq g(y) \ , \ |x - x_0| < \varepsilon \ , \ y \in U$$

con $1 \leq j \leq n$ fijo, entonces la funci'on $F(x) = \int_U f(x,y)dy$ es derivable para $|x - x_0| < \varepsilon$ respect de x_j, y $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)dy$

Ejercicio 3.
i) Sean f, g derivables, h continua. Derivar

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s)ds$$

ii) Sean f, g derivables, $h = h(x,s)$ continua en las variables (x,s) y derivable respecto de x, $\frac{\partial}{\partial}$ acotada. Derivar

$$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,s)ds$$

Ejercicio 4.
i) Desigualdad de Hőlder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_{p'}$$

ii) Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Ejercicio 5. Dada $f \in L^p(R^n)$, $h \in R^n$, $\tau_{-h} f(x) := f(x + h)$.
i) Para $1 \leq p < \infty$, $\lim_{h \to 0} ||\tau_{-h} f - f||_p = 0$. (Pista: usar que $C_0(R^n)$ es denso en $L^p(R^n)$ $1 \leq p < \infty$).
ii) Mostrar que i) no vale para $p = \infty$.

Ejercicio 6. Desigualdad de Young.

Sea $f \in L^1(R^n),\ g \in L^p(R^n),\ 1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f * g \in L^p(R^n)$ con $||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$.

Ejercicio 7. Sea $f \in L^p(R^n),\ g \in L^{p'}(R^n)$. Entonces $f * g \in L^\infty(R^n)$, $||f * g||_\infty \leq ||f||_p ||g||_{p'}$ y adem'as $f * g$ es uniformemente continua.

Ejercicio 8. Sean $f \in C_0^k(R^n)$ $(k \in N),\ g \in L^1_{loc}(R^n)$. Entonces $f * g \in C^k(R^n)$ y $D^\alpha(f * g) =$ $(D^\alpha f) * g,\ |\alpha| \leq k$.

Ejercicio 9.

i) Sea

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Probar que $\phi \in C_0^\infty(R)$.

ii) Construir $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ tal que $sop(\phi) \subset B(0, \varepsilon), \varepsilon > 0$.

Ejercicio 10. Sea $\phi \in L^1(R^n)$ tal que $\int \phi = 1$, y $\forall \varepsilon > 0$, sea $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon)$. Probar que

i) Si $f \in L^p(R^n),\ 1 \leq p < \infty \Rightarrow ||f * \phi_\varepsilon - f||_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

ii) Si $f \in L^\infty(R^n),\ f$ uniformemente continua en $V \subset R^n$, entonces $\sup_{x \in V'} |f * \phi_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0$ si $\varepsilon \to 0$, $\forall V'$ compacto, $V' \subset V$.

iii) Si f es continua y acotada en R^n, entonces $f * \phi_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de R^n.

iv) Si adem'as $\phi \in C_0^\infty(R^n),\ f \in L^p(R^n) \Rightarrow f * \phi_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$.

v) Calcular $f * \phi_\varepsilon$ si $f = \mathcal{X}_{[a,b]}$ y ϕ es la funci'on del ejercicio 9 i).

Ejercicio 11. Demostrar que $C_0^\infty(R^n)$ es denso en $L^p(R^n)$ $1 \leq p < \infty$ utilizando los resultados obtenidos. Pista: las funciones de $L^p(R^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(R^n)$ $1 \leq p < \infty$.

Ejercicio 12. Sea - un dominio de R^n.

Si $f \in L^1_{loc}(-)$ y $\int f\varphi = 0\ \forall \varphi \in C_0^\infty(-) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.

Ejercicio 13. Si $f \in L^1_{loc}(R)$ y $\int f\varphi' = 0\ \forall \varphi \in C_0^\infty(R) \Rightarrow f =$ cte c.t.p.

Pista: tomar $g \in C_0^\infty(R)$ tal que $\int g = 1$ y para cada $\varphi \in C_0^\infty(R)$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$ es la derivada de una funci'on $C_0^\infty(R)$.

Ejercicio 14. Teorema de la divergencia - F'ormulas de Green

Sea - un dominio en R^n con frontera C^1

i) si $\vec{V} = \vec{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x)),\ v_i \in C^2(-) \cap C^1(\overline{-}),\ 1 \leq i \leq n$, entonces

$$\int \operatorname{div} \vec{V}(x)dx = \int_\partial \vec{V}(x) \cdot \eta(x)dS_x$$

(donde $\operatorname{div} \vec{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ y η es la normal exterior al dominio -).

ii) si $u, v \in C^2(-) \cap C^1(\overline{-})$

$$\int (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)dx = \int_\partial v\frac{\partial u}{\partial \eta}dS_x$$

$$\int (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial} (v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta})dS_x$$

Ejercicio 15. Revisar los siguientes teoremas:
i) Teorema de la función inversa.
ii) Teorema de la función implícita.
iii) Teorema de Arzelà-Ascoli.