ECUACIONES DIFERENCIALES
PRACTICA 1
Segundo cuatrimestre 2004

1 Primera Parte: Ecuaciones Ordinarias

Ejercicio 1 *Lema de Gronwall.*

Sean u y v funciones continuas no negativas en $[a,b]$ tales que, para un $\alpha \geq 0$, satisfacen l desigualdad

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^b u(\tau)v(\tau)\ d\tau, \qquad t \in [a,b]$$

Probar que

$$u(t) \leq \alpha\ \exp \int_a^b v(\tau)\ d\tau$$

En particular, si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$.

Ejercicio 2 *Probar que el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t,u), & t_0 < t < t_1 \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

donde $f(t,u)$ es una función continua y $u \in C([t_0,t_1]) \cap C^1(t_0,t_1)$, es equivalente a la ecuació integral

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, u(\tau))\ d\tau$$

1. *Probar que el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 1 + u^2 \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

   tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. *Eatudiar la unidad de solución del problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u^{1/3} \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3 *(Continuidad respecto al dato inicial)*

Sea $f(t,u)$ definida en el abierto $\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$, continua en y uniformement lipschitziana en la variable u, con constante K, sobre todo . Para $i = 0,1$ denominaremos J_i a intervalo, en la variable t, de existencia de la solución $u_i : J_i \rightarrow$ del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} = f(t,u_i) \\ \\ u_i(t_0) = x_i \end{cases}$$

Probar que para cada $t \in J_0 \cap J_1$, se cumple la desigualdad

$$|u_0(t) - u_1(t)| \leq \exp\left(K\,|t-t_0|\right)\ |x_0 - x_1|$$

Concluir desde aquí que el problema de valores iniciales tiene solución única.

2 Problemas Variacionales

Ejercicio 4 *Dados dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) con $y_2 < y_1$, hallar la curva que minimiza el tiemp de caída de una partícula que se desliza por ella, sólo por acción de la gravedad. A esta curva se l denomina "braquistocrona".*

Ejercicio 5 *Hallar la curva con extremos $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$ (con $y_1, y_2 > 0$) que minimiza e área de la superficie de revolución generada por la rotación de dicha curva alrededor del eje z.*

Ejercicio 6 *¿Qué problema hay que plantear para encontrar puntos críticos del funcional*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x,y,y'\right)\ dx$$

sobre todas las funciones que toman el valor y_1 en x_1? (es decir que no se imponen condiciones sobr y en el extremo x_2)

Ejercicio 7 *Hallar la curva de longitud mínima que pasa por el punto (x_1,y_1) e interseca la rect $x = x_2$.*

Ejercicio 8 *Péndulos*

1. *Péndulo simple*

   Si tenemos una masa m suspendida de una barra rígida inextensible de longitud l, el movient pendular de la masa m es un mínimo del funcional

   $$I = \int_0^t \left(\frac{m}{2} l^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta)\right) dt$$

   donde θ es el ángulo que forma el hilo con la dirección vertical. Hallar la ecuación del movimien to y resolverla para $|\theta| \ll 1$.

2. *Péndulo doble.*

Si tenemos una masa m_1 *suspendida de un hilo inextensible de longitud* l_1, *y a su vez de ést* *pende otra masa* m_2 *unida a* m_1 *por otro hilo inextensible de longitud* l_2. *El moviento pendula* *del sistema es un mínimo del funcional* $I = \int_0^t L(t, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)dt$ *con* $L = T - U$ *siendo*

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\right)\right] \\ U &= -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g \left(l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)\right) \end{aligned}$$

donde θ_1 *es el ángulo que forma el hilo* l_1 *con la vertical y* θ_2 *el ángulo que forma el hilo* l *también con la vertical. Hallar la ecuación del movimiento y resolverla para* $|\theta_1|$ *y* $|\theta_2| \ll 1$.