Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2004

PRÁCTICA 5

1. Resolver por el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0,L)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = A,\ u(L,t) = B & \text{en } t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L, \end{cases}$$

   donde A y B son constantes, reduciendo el problema a uno con condiciones homogéneas.

2. Resolver por el método de separacón de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0,L)\times(0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L. \end{cases}$$

3. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la fórmula de D'Alembert.

4. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. *a*) Hallar una solución general de la siguiente ecuación de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

   (Sugerencia: tomar $x = x(t)$ y calcular u'.)

   b) Verificar que la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

   puede "factorizarse" de la siguiente manera

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

   c) Combinar (a) y (b) para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

6. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &=& 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) &=& 0 & t > 0 \\ u(x,0) &=& g(x) & x > 0 \\ u_t(x,0) &=& h(x) & x > 0. \end{cases}$$

7. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt}-\Delta u &=& 0 & \text{en } I\!R^3\times(0,\infty) \\ u(x,0) &=& g(x) & \\ & & & \text{en } I\!R^3\times\{t=0\} \\ u_t(x,0) &=& h(x) & \end{array}\right.$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g,h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x,t)|\le\frac{C}{t}\quad\text{para todo } x\in I\!R^3,\ t>0.$$

8. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)(\phi_{tt}(x,t)-\phi_{xx}(x,t))\,dxdt=0$$

para toda $\phi\in C_0^2(I\!R^2)$.

   a) Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
   b) Mostrar que las funciones discontinuas

$$u_1(x,t)=H(x-t),\quad u_2(x,t)=H(x+t)$$

   donde H es la función de Heaviside

$$H(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & x<0 \\ 1, & x\ge 0\end{array}\right.$$

   son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

9. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x,t)=w(|x|,t)$ $x\in I\!R^3$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x,t)=\frac{F(|x|-t)+G(|x|+t)}{|x|}.$$

10. Sea u la solución clásica de

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt}-\Delta u &=& 0 & \text{en } B_1(0)\times\{t>0\} \\ u &=& 0 & \text{en } \partial B_1(0)\times\{t>0\} \\ u &=& f & \text{en } B_1(0)\times\{t=0\} \\ u_t &=& g & \text{en } B_1(0)\times\{t=0\} \end{array}\right.$$

Probar que si f y g son radiales entonces u es radial.