Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2004

PRÁCTICA 6

ESPACIOS DE SOBOLEV

1. (a) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $1 \le p \le \infty$ entonces $u \in AC[a,b]$.

   (b) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $p > 1$, entonces

$$|u(x) - u(y)| \le \left(\int_a^b |u'|^p dt \right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. Sea $f \in H^1(I\!R)$, probar que $h^{-1}(\tau_h f - f)$ converge a f' en $L^2(I\!R)$ cuando $h \to 0$, donde $\tau_h f(x) = f(x+h)$.

   Sugerencia: escribir $h^{-1}(\tau_h f - f)$ como $f' * \varphi_h$.

3. (a) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1((a,b))$ $|f(x)| \le C\|f\|_{H^1((a,b))}$

   (b) Mostrar que (a) es falso en $\Omega \subset\subset I\!R^2$.

   (c) Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1((a,b))$ es precompacto en $C([a,b])$, y por lo tanto en $L^2((a,b))$.

4. Sea $f \in L^2((a,b))$. Probar que $f \in H^1((a,b))$ con $f(1) = f(0)$ si y sólo si $\sum_k k^2|\hat{f}(k)|^2 < \infty$, donde $\hat{f}(k)$ son los coeficientes del desarrollo de f en series de Fourier.

5. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \eta_\varepsilon * u$ en Ω_ε (dónde η es el nucleo regularizante, η_ε las aproximaciones de la identidad y $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega / dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$). Entonces

   (a) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.

   (b) $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

6. Probar que si $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega |Du|^2 dx \le C \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

   Concluir que en $H^2_0(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la usual.

7. Supongamos que Ω es conexo y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisface $\nabla u = 0$ a.e. en Ω. Probar que u es constante en Ω.

8. Sea $F : I\!R \to I\!R$ una función C^1 con F' acotada. Supongamos que Ω es acotado y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad F(u)_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \ (i = 1, \ldots, n).$$

9. Sea $1 < p < \infty$ y Ω acotado.

   (a) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{a.e. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{a.e. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

(Sugerencia: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

$$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0.) \end{cases}$$

(c) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\nabla u = 0 \text{ a.e. en } \{u = 0\}.$$

10. Sea Ω un abierto conexo y acotado de $I\!R^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y Ω tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $u \in H^1(\Omega)$, donde

$$(u)_\Omega = -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u \, dx.$$

11. Usar la transformada de Fourier para probar que si $u \in H^k(I\!R^n)$ con $k > n/2$, entonces $u \in L^\infty(I\!R^n) \cap C(I\!R^n)$ y

$$\|u\|_{L^\infty(I\!R^n)} \leq C \|u\|_{H^k(I\!R^n)},$$

donde la constante C depende sólo de k y n.

12. Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

si verifica

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. ($\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$).

(a) Probar que $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de la ecuación si y sólo si es solución débil.

(b) Probar que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de la ecuación. (Sugerencia: Ejercicio **??**).

13. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

para toda $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b) Mostrar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de este problema.

14. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_\Omega f\, dx = 0$.

(b) Mostrar que si $f \in L^2(\Omega)$ verifica que $\int_\Omega f\, dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega u\, dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(\Omega)$ salvo constante. (Sugerencia: Ejercicio **??**).

15. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$. Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \nearrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(\Omega)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H^1(\Omega)$.