Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2005
Práctica 1
ECUACIÓN DE LAPLACE

1. Probar que la ecuación de Laplace
$$\Delta u = 0$$
es invariante por rotaciones; esto es, si O es una matriz ortogonal y definimos $v(x) = u(Ox)$, entonces
$$\Delta v = 0.$$

2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

   (a) *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones armónicas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es armónica.

   (b) *Homotecias:* Si u es armónica, entonces $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ es armónica.

   (c) *Traslaciones:* Si u es armónica, entonces $u(x - \xi)$ es armónica.

   (d) *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x, \gamma)$ es armónica para cada γ.

   (e) *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\int_a^b u(x, \gamma) d\gamma$ es armónica.

   (f) *Diferenciación respecto a x:* Si u es armónica, entonces $D^\alpha u$ es armónica para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

   (g) *Convoluciones:* Si u es armónica, entonces $\int u(x - \xi)\varphi(\xi) d\xi$ es armónica.

3. Sea u armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto simplemente conexo. Probar que entonces existe v armónica en Ω tal que $u + iv$ es holomorfa.

4. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, se busca $u = u(x, y)$ tal que

   (a)
$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{en } D, \\ u(x,0) &= 0, \\ u(1,y) &= 0, \\ u(x,1) &= 0, \\ u(0,y) &= \sin(\pi y). \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{en } D, \\ u(x,0) &= 2\sin(3\pi x), \\ u(1,y) &= 0, \\ u(x,1) &= 0, \\ u(0,y) &= 3\sin(\pi y) + 5\sin(2\pi y). \end{cases}$$

5. Resolver usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, se busca $u = u(x, y)$ tal que
$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{en } D, \\ u(x,0) &= f_1(x), \\ u(1,y) &= f_2(y), \\ u(x,1) &= f_3(x), \\ u(0,y) &= f_4(y). \end{cases}$$
Imponer condiciones sobre las f_i para que la función hallada sea efectivamente solución de la ecuación.

6. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en $\mathbb{R}^2$.

(a) $\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{en } |x| < 1, \\ u &= f \quad \text{en } |x| = 1, \end{cases}$

donde $f \in C^1(\{|x| = 1\})$. (Sug.: Pasar a coordenadas polares).

(b) $\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{en } |x| < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= f \quad \text{en } |x| = 1, \end{cases}$

donde f es como en (a) y además $\int_{\{|x|=1\}} f\, dS = 0$ y u se anula en el origen.

Probar la ecuación del item (b) no tiene solución si $\int_{\{|x|=1\}} f\, dS \neq 0$.

7. Decimos que $v \in C^2(\Omega)$ es subarmónica si $\Delta v \geq 0$ en Ω.

   (a) Probar que si $v \in C(\overline{\Omega})$ entonces $\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$.
   Sugerencia: Probarlo primero suponiendo que v satisface que $\Delta v > 0$ y luego probarlo para $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon |x|^2$ y hacer $\varepsilon \to 0$.

   (b) Probar que si $x_0 \in \Omega$ y $r < d(x_0, \partial\Omega)$, entonces

$$v(x_0) \leq \fint_{B(x_0,r)} v(\xi) d\xi$$

   (c) Probar que v verifica el principio fuerte del máximo.

   (d) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y regular. Si u es armónica y $v = \phi(u)$, entonces v es subarmónica.

   (e) Probar que $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica, si u es armónica.

8. Sea u una solución regular de

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{en } B_1(0) \\ u &= g \quad \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Probar que existe una constante C, que depende sólo de la dimensión del espacio, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f| \right).$$

¿Es cierta la conclusión del ejercicio si cambiamos $B_1(0)$ por Ω un dominio acotado cualquiera?

9. Notemos por B_1^+ a la semiesfera $\{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < 1, x_1 > 0\}$. Sea $u \in C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ con $u = 0$ en $\partial B_1^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y notamos $x = (x_1, x')$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definimos

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_1 \geq 0, \\ -u(-x_1, x') & \text{si } x_1 < 0, \end{cases}$$

para $x \in B_1(0)$. Probar que U es armónica en $B_1(0)$. Concluir que u es C^∞ hasta $\{x_1 = 0\}$.

10. Sea u una función armónica en $B_1(0)$. Probar que

$$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq C \sup_{B_1(0)} |u(x)|,$$

donde C depende sólo de la dimensión del espacio.

11. Probar que si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y acotada, entonces u es constante.

12. Probar que existe a lo sumo una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ u &= g \quad \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

¿Vale la unicidad si eliminamos la hipótesis de que u sea acotada?

13. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una función u. Probar que u es armónica.

14. Sea $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (Ω acotado), la solución del siguiente problema,

$$\begin{cases} \Delta u_n &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u_n &= g_n \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que si $g_n \to g$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces existe $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en Ω y $\Delta u = 0$ en Ω.

15. Sea Ω un dominio acotado y sea $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \Delta u_n &= f_n \quad \text{en } \Omega, \\ u_n &= g_n \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que si $f_n \to f$ uniformemente en Ω y que si $g_n \to g$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en Ω y, más aún, u es solución de

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= g \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

en el siguiente sentido "débil":

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \text{para toda } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

16. *Teorema de Harnack de convergencia monótona.*

Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona de funciones armónicas en un dominio Ω, entonces la sucesión converge en todo punto o diverge en todo punto. En el primer caso, la convergencia es uniforme sobre compactos y el límite es una función armónica.

17. Probar que si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y $|u(x)| \le C(1 + |x|^k)$, entonces u es un polinomio de grado a lo sumo k.

18. Probar que si el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f \qquad \text{en } \Omega, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución en Ω acotado ($u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$) entonces

$$\int_\Omega f(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(x) \, dS.$$

Relacionar con el ejercicio 6.

19. Sea Ω un dominio con borde regular. Probar que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces u es constante.

20. Una función $u \in C(\Omega)$ se dice subarmónica (superarmónica) en Ω si para cada bola $B \subset\subset \Omega$ y para cada función h armónica en B que satisface $u \le h$ ($u \ge h$) en ∂B, se tiene que $u \le h$ ($u \ge h$) en B.

   (a) Mostrar que si $u \in C^2(\Omega)$, u es subarmónica (según esta definición) si y sólo si $\Delta u \ge 0$.

(b) Si u es subarmónica en Ω, entonces satisface el principio fuerte del máximo; y si v es superarmónica en Ω acotado, con $v \geq u$ en $\partial\Omega$, entonces $v > u$ en Ω o $v \equiv u$.

(c) Sea u subarmónica en Ω y $B \subset\subset \Omega$. Notamos con $\widetilde{u}$ la función armónica en B (dada por la integral de Poisson) que satisface $\widetilde{u} = u$ en ∂B. Definimos el *levantamiento armónico* de u en B por

$$U(x) = \begin{cases} \widetilde{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega - B. \end{cases}$$

Entonces U es subarmónica en Ω.

(d) Si $u_1, \ldots, u_N$ son subarmónicas en Ω, entonces

$$u(x) = \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

es subarmónica en Ω.

(e) Enunciar y demostrar los correspondientes resultados para funciones superarmónicas.

21. Sean A, B matrices simétricas y semidefinidas positivas de $n \times n$. Probar que $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.

22. *Principio débil del máximo*

Sea

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

donde a_{ij}, b_i y c son funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. La matriz (a_{ij}) es simétrica y definida positiva para cada $x \in \overline{\Omega}$ (un operador $\mathcal{L}$ con estas propiedades se dice *elíptico*). Probar que si $\mathcal{L}u \geq 0$ en Ω y $c \equiv 0$ entonces el máximo de u se alcanza en $\partial\Omega$.

23. *Lema de Hopf.* Sea Ω un dominio con la propiedad que para todo $x_0 \in \partial\Omega$, existe una bola $B_r(y) \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B_r(y)$ (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ en Ω, $x_0 \in \partial\Omega$ y $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

24. Usar el lema de Hopf para dar otra demostración del principio fuerte del máximo.

25. Sea Ω un dominio con borde C^2. Probar que Ω posee la propiedad de bola tangente interior.