Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2005
Práctica 2
TRANSFORMADA DE FOURIER

Notación: Notaremos por $\mathcal{F}[f]$ a la transformada de fourier de $f \in L^1(I\!R^n)$ definida por

$$\mathcal{F}[f](y) = \int f(x)e^{-2\pi ixy}dx.$$

1. Sea $f \in L^1$ y sean $\alpha \in I\!R^n$, $\lambda \in I\!R$.
   (a) Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y - \alpha)$.
   (b) Si $g(x) = f(x - \alpha)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y)e^{-2\pi i\alpha y}$.
   (c) Si $g(x) = f(x/\lambda)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \lambda^n\mathcal{F}[f](\lambda y)$.
2. Probar que si $f \in \mathcal{S}(I\!R^n)$, entonces $\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] = f(-x)$.
3. Probar que la transformada de Fourier de una función f será una función real si y sólo si f es par.
4. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:
   $\chi_{[-1,1]}$, $\exp(-a|x|)$, $1/(1 + x^2)$.
5. Sea $f : [0, \infty) \to I\!R$ una función L^1. Se definen
   (a) La Transformada-coseno de Fourier como
   $$\mathcal{F}_c[f](y) = \int_0^\infty f(x)\cos(xy)\,dx.$$
   (b) La Transformada-seno de Fourier como
   $$\mathcal{F}_s[f](y) = \int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,dx.$$
   Mostrar que si se extiende f como una función par a toda la recta, tenemos
   $$\mathcal{F}_c[f](y) = \pi\mathcal{F}[f](y),$$
   y que si se extiende a f como una función impar, se tiene
   $$\mathcal{F}_s[f](y) = \frac{\pi}{i}\mathcal{F}[f](y).$$
6. Sea A una matriz de $n\times n$ no singular. ¿Cómo se relacionan la transformada de Fourier de $f(Ax)$ con la de $f(x)$? ($f \in L^1$). Usar este resultado para mostrar que la transformada de Fourier tranforma funciones radiales en funciones radiales.
7. Probar que si $f \in L^1(I\!R^n)$ es de soporte compacto, entonces $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(I\!R^n)$.
8. Sea $f \in \mathcal{S}$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$ a.e.
9. (a) Probar que si ϕ, ϕ' y ϕ'' estan en $L^1(I\!R) \cap \{g \in C(I\!R) :\ \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0\}$ entonces existe $f \in L^1(I\!R)$ tal que $\mathcal{F}[f] = \phi$.
   (b) Sea $K \subset I\!R$ compacto y $U \subset I\!R$ abierto tal que $K \subset U$. Probar que existe $f \in L^1(I\!R)$ tal que $\mathcal{F}[f](y) = 1$ para todo $y \in K$ y $\mathcal{F}[f](y) = 0$ para todo $y \in I\!R - U$.
   (c) Probar que $\mathcal{F}[L^1(I\!R)]$ es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. (Sug.: Stone-Weierstrass)
10. Utilizar la transformade de Fourier para obtener una solucón explícita de la siguiente ecuación:
   $$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } I\!R^2_+ = \{y > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en } I\!R. \end{cases}$$

11. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in L^2$.

12. Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u &= g \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde u y g son funciones a valores complejos y $g \in L^2$.