Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)
Trabajo Práctico N° 9
Matrices Estocásticas. Procesos de Markov

9.1. Determine cuáles de las siguientes matrices son estocásticas o de Markov.

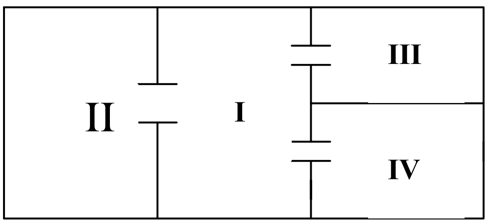
[a] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; **[b]** $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; **[c]** $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0{,}2 \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$;

[d] $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0{,}5 \\ -\frac{1}{2} & 0{,}5 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; **[e]** $E = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

9.2. Supongamos que la población de la República Argentina no crece, pero cada año 1 de cada 10 residentes de la Capital se traslada al interior, mientras que 1 de cada 5 habitantes del interior se muda a la Capital. En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la Capital y 30 millones en el interior.

[a] Escriba la matriz de transición para este proceso.
[b] Calcule el estado de la población dentro de 10 años.
[c] Lo mismo pero dentro de 30 años.

9.3. 21 ratones se encuentran en el instante inicial en la casilla I (ver diagrama). Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de las casillas adyacentes. Se realizan observaciones cada hora, lapso en el que los ratones cambian indefectiblemente de una casilla a otra contigua.



[a] Determine la matriz de transición del proceso.
[b] Determine el vector de estado después de 4 horas.
[c] ¿Existe un estado de equilibrio? ¿Por qué?

9.4. En una población animal tenemos una epizootia que en este momento afecta al 30% de los animales. El resto está sano pero puede enfermarse. Los especímenes que se curan adquieren inmunidad. La progresión de la epizootia se atiene a la siguientes reglas: (i) Cada semana un 15% de los sanos no inmunes se enferman; (ii) En el mismo lapso, un 10% de los animales enfermos se cura.

[a] Formular la matriz de transición del proceso.
[b] ¿Cuál es el estado inicial?
[c] ¿Cuál es el estado después de 5 semanas?
[d] ¿Existe un estado de equilibrio?

9.5. Un proceso de Markov admite 3 estadios o sectores: α, β, y γ. La probabilidad de pasar del estadio α a cada uno de los otros sectores es $\frac{1}{2}$. Un individuo que está en el estadio β tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ de pasar al γ, y lo mismo sucede para transitar del β al α. Los individuos en el estadio γ tienen probabilidad 1 de pasar al α en el período siguiente.

[a] Arme la matriz estocástica A de transición.

[b] Si el estado actual del proceso es $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, ¿cuál es el próximo estado?

[c] Analice el comportamiento de A^n para valores "altos" de n.

[d] ¿Existirá un estado límite?

9.6. Se observa la alimentación de una determinada especie de insectos en un ecosistema. En la actualidad la mitad de los insectos come una gramínea baja, el 30% una variedad de gramínea alta, y el restante 20% se alimenta de las hojas de cierto tipo de árbol. Sin embargo, las preferencias alimentarias cambian de año en año. Se ha determinado que un 25% de los insectos que comían gramínea baja cambiarán el próximo año a hojas de árbol y un 20% a gramínea alta. Entre los que se alimentaban de gramínea alta un 50% pasará a gramínea baja. Un 40% de los que se alimentaban con hojas de árboles pasarán a comer gramínea baja, y el resto seguirá con las hojas de árboles.

[a] ¿Puede formar la matriz de transición del proceso?

[b] ¿Cuál será el vector de estado dentro de 3 años?

[c] ¿Existe un estado de equilibrio?

9.7. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores, y no crece pero se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75% de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.

[a] Determine la matriz y el estado inicial que rigen el proceso.

[b] Calcule los 5 primeros estados del proceso de Markov.

[c] Verifique que el vector $\begin{pmatrix} \frac{2}{17} \\ \frac{15}{17} \end{pmatrix}$ es estado de equilibrio.

9.8. En un proceso de Markov conocemos la matriz de transición $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ y el estado $V(2) = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix}$. Calcule V(0) y V(1).

9.9. Si un proceso de Markov tiene matriz de transición $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$, verifique que el vector $V = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ es un estado de equilibrio del proceso.

9.10. Sea $M \in R^{3x3}$,

$$M = \begin{pmatrix} a & a+\frac{1}{10} & b+\frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b+\frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}.$$

[a] Determinar <u>todos</u> los $a, b \in R$ para los cuales M resulta ser una matriz de Markov.

[b] Para los valores a y b hallados en [a], ¿Es posible determinar dos vectores de equilibrio de M que sean linealmente independientes? Si la respuesta es afirmativa, hallarlos. Si la respuesta es negativa, justificar adecuadamente.

[c] Para los valores a y b hallados en [a], verificar que M^t es también una matriz de Markov. ¿Fue esto una casualidad o una ley general?

9.11. Sea $A \in R^{3x3}$ una matriz de Markov tal que $a_{13} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{22} = \frac{7}{10}$, $tr(A) = \frac{25}{10}$ y $(0,2,3)$ es un vector de estado de equilibrio para el proceso de Markov descripto por A.

[a] Construya A.

[b] ¿Es posible determinar dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes? Justifique.

[c] Si $X(0) = (1,3,2)$ es el vector inicial, ¿tiene el proceso estado límite? En el caso afirmativo, encuéntrelo.

[d] ¿Existe A_∞? En el caso afirmativo, determínela.

9.12. Sea $M \in R^{3x3}$ una matriz de Markov tal que $m_{12} = m_{13} = 0$, $m_{22} + m_{23} = \frac{9}{10}$, $tr(M) = \frac{5}{2}$ y $det(M) = \frac{1}{2}$.

[a] Hallar <u>todos</u> los autovalores de M.

[b] Si se sabe además que, para cierto vector de estado inicial, el vector $(1,2,3)$ es estado límite del proceso de Markov cuya matriz de transición es M, hallar M.

[c] ¿Es posible determinar dos vectores de estado de equilibrio de M que sean linealmente independientes? Justificar.

[d] ¿Existe M_∞? Justificar.

9.13. Una población en estudio está distribuida en un territorio dividido en tres sectores, y no crece pero se desplaza. Día a día se observa que: el 100 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplazado al Sector 1, mientras que la población del Sector 3 permanece (sin desplazarse) en su sector. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

[a] Determine la matriz de transición A que describe el proceso.

[b] ¿Es posible determinar dos vectores de A que sean linealmente independientes? Justifique.

[c] Si inicialmente hay 200 habitantes en el Sector 1, 200 habitantes en el Sector 2 y 300 habitantes en el Sector 3, ¿tiene el proceso un estado límite? En el caso afirmativo, hállelo. En el caso negativo, justifique.

[d] Si inicialmente hay 100 habitantes en el Sector 1, 200 habitantes en el Sector 2 y 300 habitantes en el Sector 3, ¿tiene el proceso un estado límite? En el caso afirmativo, hállelo. En el caso negativo, justifique.

[e] ¿Existe A_∞? Justifíquelo.

9.14. Una población en estudio está distribuida en un territorio dividido en cuatro sectores, y no crece pero se desplaza. Día a día se observa que el 100 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplazado al Sector 3, el 100 % de la población del Sector 3 se ha desplazado al Sector 4 y el 100 % de la población del Sector 4 se ha desplazado al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

[a] Determine la matriz de transición A que describe el proceso.

[b] ¿Es posible determinar dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes? Justificar.

[c] Si inicialmente hay 100 habitantes en cada uno de los sectores, ¿tiene el proceso estado límite? En el caso afirmativo, hallarlo.

[d] Si inicialmente hay 100 habitantes en el Sector 1, 300 habitantes en el Sector 2, 100 habitantes en el Sector 3 y 300 habitantes en el Sector 4, ¿tiene el proceso estado límite? En el caso afirmativo, hallarlo.

[e] ¿Existe A_∞? (Sugerencia: calcular A^4). Justificar con claridad.