Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)
Trabajo Práctico N° 2
<u>Sistemas Lineales</u>

2.1. Decida cuáles de los siguientes sistemas de relaciones matemáticas son *sistemas de ecuaciones lineales* (brevemente *sistemas lineales*):

[a] $\begin{cases} 3x+5y-4z=7 \\ -x-3y+2z=9 \\ 2x+2y-11z\le 3 \end{cases}$. **[b]** $\begin{cases} 2x-5y+z=19 \\ x=5 \\ z=-1 \end{cases}$.

[c] $\begin{cases} -2x+y-z=0 \\ x-3y+2xz=-2 \end{cases}$. **[d]** $\begin{cases} 3x+5y-4z=7 \\ -x-3y+2z=9 \\ 2x+2y-11z=3 \end{cases}$.

[e] $\begin{cases} x+2y+3z=12 \\ -8x+2y+2z=0 \\ -x+3y^2-4y=2 \end{cases}$.

2.2. Considere el sistema lineal $S:\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2-x_4=0 \\ 2x_1+3x_3+x_4=-1 \end{cases}$.

Dados $\vec{v}_1=(0,0,0,0)$, $\vec{v}_2=(1,1,1,4)$, $\vec{v}_3=\left(-1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ y $\vec{v}_4=(-1,-2,-3,-7)$:

[a] ¿Cuáles de las cuaternas son soluciones de S?

[b] ¿Cuáles de las cuaternas son soluciones del sistema homogéneo asociado?

2.3. Hallar, si es que existen, <u>todos</u> los $a,b\in R$ para los cuales $(2,-2,1)$ es solución del sistema lineal en cada uno de los siguientes casos:

[a] $\begin{cases} x_1-x_2+ax_3=3 \\ bx_1+x_2-x_3=3 \\ ax_1+bx_2+8x_3=0 \end{cases}$. **[b]** $\begin{cases} x_1+2ax_2+x_3=-1 \\ ax_2-bx_3=-4 \\ bx_1+x_2+(2a-b)x_3=3 \end{cases}$.

2.4. Considere el sistema lineal $\begin{cases} x-y+z=a \\ 2x+z=b \\ x+y=c \end{cases}$. Si sabemos que el vector $(2,1,-1)$ es solución del sistema, determine los tres parámetros y todas las soluciones del sistema.

2.5. Indicaremos a continuación varias posibles transformaciones de un sistema lineal. Deduzca (mediante razonamientos y/o contraejemplos) cuáles de estas transformaciones son admisibles, es decir, cuáles generan sistemas equivalentes con el sistema original.

[a] Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de todas las ecuaciones.
[b] Sustituir dos ecuaciones por su suma.
[c] Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.
[d] Sumar $2x+2$ al primer miembro de cada ecuación del sistema.
[e] Sustituir una ecuación por el resultado de sumarla con otra.
[f] Sustituir una ecuación por el resultado de restarle otra.

2.6. Damos varios pares de sistemas de ecuaciones. Cada uno de esos pares es equivalente. Explique por qué.

[a] $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+2y=10 \\ 6x-3y=21 \end{cases}$.

[b] $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x=12 \end{cases}$.

[c] $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ 2x+2y-z=12 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \end{cases}$.

2.7. Clasifique cada uno de los siguientes sistemas lineales. Si es compatible determinado, obtenga la solución. Si es compatible indeterminado, describa el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no haga nada (¿qué le vamos a hacer?).

[a] $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -x+2y=4 \end{cases}$. **[b]** $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+z=3 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$. **[c]** $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=1 \\ x+5y-4z=5 \end{cases}$.

[d] $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+y=0 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$. **[e]** $\begin{cases} x+2y-z+2t=0 \\ x+y+z+2t=1 \\ -x+y-5z-2t=-3 \end{cases}$. **[f]** $\begin{cases} x-2y-3z=-5 \\ 2x+y+z=5 \\ 3x-y+2z=11 \end{cases}$.

[g] $\begin{cases} 2x+y-z=8 \\ x-y+z=1 \\ 5x+y-z=17 \end{cases}$. **[h]** $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x-y+z=2 \\ 5x+y-z=-5 \end{cases}$. **[i]** $\begin{cases} 3y-2z+3w=9 \\ 2x+y+w=5 \\ x-y+z-w=-2 \end{cases}$.

2.8. Considere el sistema lineal $S:\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$.

[a] Agruegue una ecuación a S de manera que resulte compatible determinado.
[b] Agruegue una ecuación a S de manera que resulte compatible indeterminado.
[c] Agruegue una ecuación a S de manera que resulte incompatible.

2.9. Construir:

[a] Dos sistemas lineales distintos de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que $(-1,3,6)$ sea la única solución.

[b] Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que tenga infinitas soluciones y $(-1,3,6)$ sea una de ellas.

2.10. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones (¡justifique!):

[a] Si indicamos con n la cantidad de incógnitas de un sistema no homogéneo, y con *m* la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, puede ser que ese sistema tenga o no solución en cualquiera de los siguientes casos:

- ♦ Si vale $m < n$.
- ♦ Si vale $m = n$.
- ♦ Si vale $m > n$.

[b] Si un sistema lineal tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

[c] La ecuación $x + y = 0$ no tiene solución.

[d] Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde al menos uno de los a_i es no nulo, siempre tiene solución.

[e] Si cada ecuación de un sistema lineal tiene solución, entonces todo el sistema es compatible.

[f] Si una ecuación de un sistema lineal no tiene solución, entonces todo el sistema es incompatible.

2.11. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones (¡justifique!):

[a] Todo sistema homogéneo tiene, al menos, una solución.

[b] Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.

[c] Si indicamos con *n* la cantidad de incógnitas de un sistema homogéneo, y con *m* la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, puede ser que ese sistema tenga o no solución en alguno de los siguientes casos:

- ♦ Si vale m < n.
- ♦ Si vale m = n.
- ♦ Si vale m > n.

2.12. En el estanque de un establecimiento de cría ictícola hay tres tipos de peces (que indicamos con I, II, y III, respectivamente) que son nutridos con los alimentos A, B, y C. El consumo semanal promedio de cada pez (en unidades básicas) está dado por esta tabla

	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Pez tipo I	1	1	2
Pez tipo II	3	4	6
Pez tipo III	2	1	5

Semanalmente se vierten en el estanque 14000 unidades del alimento A, 12000 unidades del B y 31000 unidades del C. Toda la comida es ingerida y los peces están bien alimentados. ¿Cuántos peces de cada tipo hay en el estanque?

2.13. En cada uno de los siguientes sistemas, determine (si existen) aquellos valores del parámetro k que hacen que el sistema resulte ❶ compatible determinado; ❷ compatible indeterminado; ❸ incompatible. En los dos primeros casos determine el conjunto de soluciones:

[a] $\begin{cases} (k^2-9)x+y+kz=0 \\ (k-1)y+z=0 \\ (k+2)z=0 \end{cases}$.

[b] $\begin{cases} x+y+z=k \\ x+ky+z=1 \\ kz=2 \end{cases}$.

.**[c]** $\begin{cases} 6x+ky+3z=9 \\ kx+(3-k)z=3 \\ 7x+ky+(4+k)z=12 \end{cases}$.

[d] $\begin{cases} x+y+z=1 \\ (k+2)x+ky-z=0 \\ -x+y-2z=-1 \end{cases}$.

[e] $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=1 \\ 3x+7y-5z=k^2 \end{cases}$.

[f] $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+(k-1)y=3 \\ x+y+(k^2-5)z=k \end{cases}$.

[g] $\begin{cases} x+y=1 \\ kx+k^2z=1 \end{cases}$.

[h] $\begin{cases} x-y=-1 \\ kx-2z=1 \\ k^2x+(k^2-7k+6)z=k^2-k-3 \end{cases}$.

[i] $\begin{cases} x+ky+2z-w=k+2 \\ x+ky-2z=2 \\ 3x+3ky+2z-2w=k \end{cases}$.