

Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)

Trabajo Práctico N° 4

Geometría

- 4.1.** En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L :
- [a]** $L : t(-2,3) + (2,2)$; $P_1 = (2,2)$, $P_2 = (-2,3)$, $P_3 = (0,0)$, $P_4 = (12,-13)$, $P_5 = (2,-1)$.
- [b]** $L : t(-1,1) + (3,-3)$; $P_1 = (3,-3)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (-1,1)$, $P_4 = (3,4)$, $P_5 = (6,6)$.
- 4.2.** Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación implícita y la ecuación explícita de la recta que:
- [a]** Pasa por $P = (-1,2)$ y está dirigida por $v = (3,1)$.
- [b]** Pasa por $P = (4,5)$ y está dirigida por $v = (0,3)$.
- [c]** Pasa por $A = (1,-4)$ y $B = (-1,-3)$.
- [d]** Es paralela a $L : t(-2,3) + (1,-1)$ y pasa por $P = (1,-4)$.
- [e]** Pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por $(4,-5)$ y $(\frac{1}{2},3)$.
- [f]** Es perpendicular a $L : t(2,3) + (5,7)$ y pasa por $P = (1,-3)$.
- 4.3.** Graficar y dar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta de ecuación:
- [a]** $y = 3x - 2$.
- [b]** $2x - 3y = 5$.
- [c]** $y = 4$.
- [d]** $x = -5$.
- 4.4.** En cada uno de los siguientes casos, dar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que:
- [a]** Está dirigida por $v = (0,1,0)$ y pasa por $P = (0,2,4)$.
- [b]** Está dirigida por $v = (1,2,3)$ y pasa por $P = (3,0,4)$.
- [c]** Pasa por los puntos $(-2,3,4)$ y $(-1,3,1)$.
- [d]** Es paralela al eje z y pasa por $(1,2,3)$.
- [e]** Es paralela a $L : t(2,4,-5) + (0,3,-1)$ y pasa por $P = (3,-1,2)$.
- [f]** Es perpendicular a $L : t(1,-2,1) + (3,5,6)$ y pasa por $P = (1,9,-3)$. ¿Es única?
- 4.5.** Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por los vectores v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:
- [a]** $v = (0,1,0)$, $w = (1,0,0)$ y $P = (0,0,1)$.
- [b]** $v = (0,2,0)$, $w = (1,1,0)$ y $P = (0,1,1)$.
- [c]** Graficar los planos hallados en [a] y en [b] y compararlos.

4.6.

- [a] Dar las ecuaciones paramétricas de un plano que contenga al eje z y a la recta dirigida por $v = (1,2,1)$ que pasa por el origen.
- [b] Dar las ecuaciones paramétricas de la recta que está en la intersección del plano xz con el plano yz .
- [c] Dar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $(2,1,3)$ y $(3,-2,5)$.
- [d] Dar la ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos $(2,1,2)$, $(1,1,1)$ y $(3,2,7)$.
- [e] Dar la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $(1,2,-2)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y .
- [f] Dar la ecuación vectorial del plano que es paralelo a la recta $r : t(1,2,-4) + (1,2,1)$ y contiene a los puntos $P = (2,2,1)$ y $Q = (1,2,-3)$.

4.7.

- [a] Decidir si los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (-2,0,1)$ y $C = (3,2,0)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.
- [b] Decidir si los puntos $A = (8,2,4)$, $B = (4,2,8)$, $C = (-2,0,1)$ y $D = (1,-1,3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

4.8. Dado el plano $\pi : 2x - 5y + 3z = 11$:

- [a] Hallar todos los $a \in R$ para los cuales $(2, a, 7) \in \pi$.
- [b] ¿Existe $a \in R$ tal que $(0, 3a, 5a) \in \pi$?

4.9. Sea π el plano que contiene a la recta $L : t(1,-2,1) + (1,0,2)$ y al punto $(2,2,3)$.

- [a] Decidir si los puntos $P = (1,-2,1)$ y $Q = (3,4,4)$ pertenecen o no a π .
- [b] Encontrar todos los $a \in R$ tales que $(a, 2a + 1, a - 3) \in \pi$.

4.10. Determinar, en cada uno de los siguientes casos, si las rectas L y L' resultan paralelas, coincidentes, concurrentes o alabeadas:

- [a] $L : t(1,0,-1) + (-1,1,2)$; $L' : t(-1,1,2) + (1,0,-1)$.
- [b] $L : t(1,1,-1) + (-1,2,2)$; $L' : t(2,2,-2) + (1,0,-1)$.
- [c] $L : t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1,1,2)$; $L' : t(-2,-1,2) + (-3,2,0)$.
- [d] $L : t(1,0,-1) + (-1,1,2)$; $L' : t(1,-2,6) + (3,3,-3)$.
- [e] $L : t(1,2,-1) + (-1,-1,2)$; $L' : t(-1,1,1) + (3,2,-1)$.

4.11.

- [a] Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta $L : t(1,1,-1) + (-1,2,2)$
- [b] Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por $P = (2,1,7)$ y está dirigido por los vectores $v = (1,0,4)$ y $w = (4,-1,3)$.
- [c] Dar las ecuaciones paramétricas del plano $\pi : 2x - y + 3z = 1$.

- 4.12.** Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por P :
- [a] $P = (1, -1, 2)$; π pasa por los puntos $(0, 2, 0)$, $(-1, 1, 2)$ y $(0, 5, 5)$.
- [b] $P = (3, 3, 3)$; π está dirigido por $v = (1, 2, 1)$ y $w = (-2, 2, -3)$ y pasa por $(0, 5, 4)$.
- [c] $P = (2, 1, 0)$; $\pi : 3x - y + 2z = 4$.
- [d] $\pi : y = 3$; P es la intersección de las rectas $L : t(1, 1, 1) + (1, 0, 1)$ y $L' : t(1, -1, 2) + (0, 3, -2)$.
- 4.13.** Determinar en qué casos los planos π y α se intersecan o no. En los casos en que sea posible hallar la intersección.
- [a] $\pi : 3x - 2y + 4z = 1$; α está dirigido por $v = (2, 2, 0)$ y $w = (-3, 2, 1)$ y pasa por el punto $(2, 2, 2)$.
- [b] π pasa por $A = (3, 1, 4)$, $B = (2, 0, 2)$ y $C = (1, -1, -1)$; $\alpha : 3x - 2y - 1 = 0$.
- [c] $\pi : 4x + 2y - 3z = 1$; $\alpha : 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.
- [d] $\pi : 2x - y = 2$; α pasa por $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 0, -2)$ y $C = (2, 2, 3)$.
- [e] π pasa por $(-1, 1, 2)$ con vector normal $N = (1, 2, -1)$; α pasa por $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 1)$ y $C = (-1, -2, 2)$.
- 4.14.** Sea L la recta que pasa por $P = (1, k - 3, -2k)$ y $Q = (k^2, -k + 2, -1)$ y sea π el plano de normal $N = (1, 1, -1)$ que pasa por $A = (-5, -5, 7)$. Determinar todos los $k \in R$ tales que $L \cap \pi = \emptyset$.
- 4.15.**
- [a] Encontrar todos los puntos de R^3 que distan 6 de $(2, 1, -1)$ y que además pertenezcan a la recta $(x, y, z) = \lambda(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$.
- [b] Hallar el punto Q de la recta $(x, y, z) = t(2, -1, 4)$ más próximo al punto $P = (-4, 8, 1)$.
- 4.16.**
- [a] Sean en R^2 , $A = (-1, 1)$ y $L : (x, y) = \mu(1, 1) + (3, 0)$. Calcular la distancia de A a L .
- [b] Sean en R^3 , $A = (-1, 1, 0)$ y $L : (x, y, z) = \mu(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$. Calcular la distancia de A a L .
- [c] Sea π el plano cuyo vector normal es $N = (1, -1, 2)$ y pasa por $(1, 2, 1)$. Calcular la distancia entre el punto $(1, 2, 5)$ y el plano π .
- 4.17.** Un punto se desplaza por el espacio, de modo que en el instante t su posición viene dada por el vector $x(t) = (1 - t)e_1 + (2 - 3t)e_2 + (2t - 1)e_3$.
- [a] Probar que el punto se mueve a lo largo de una recta.
- [b] ¿En que instante t el punto toca al plano $\pi : -2x + 3y + 2z = 0$?
- [c] Calcular, para cada valor de t , la distancia del punto al plano π .
- [d] ¿Cuál es el valor de t para el cual el punto está más cerca del origen? ¿A que distancia está?

- 4.18.** Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1,2,-1)$ y pasa por $(-1,3,1)$. Sea L_2 la recta que pasa por $(-1,1,3)$ y por $(1,2,7)$.
- [a] Determinar si L_1 y L_2 se intersecan o no.
- [b] Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y hallar el ángulo entre L_1 y L_2 .
- [c] Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1,1,3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2 .
- 4.19.**
- [a] Calcular el ángulo entre las rectas de R^2 $L_1 : x - y = 1$ y $L_2 : x + y = 3$.
- [b] Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_2) = \angle(L_1, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.
- 4.20.**
- [a] Hallar las ecuaciones implícitas de la recta que es intersección del plano xy con el plano yz .
- [b] Hallar las ecuaciones implícitas de la recta $L : t(1,0,-1) + (-1,1,2)$.
- [c] Hallar las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos $(-5,3,7)$ y $(2,-3,3)$.
- 4.21.** Considere las rectas: $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 9 \end{cases}$ y $L_2 : \alpha(1,0,2) + (1,2,-3)$.
- [a] Probar que L_1 y L_2 son paralelas.
- [b] Probar que $P = (2,2,-1) \in L_2$.
- [c] Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por P .
- [d] Hallar $Q = L_1 \cap \pi$.
- [e] Hallar $d(P, Q)$.
- [f] ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?
- 4.22.** Sean $A = (0,2,2)$, $B = (2,0,-1)$ y $C = (0,-2,-1)$.
- [a] Hallar la recta L que pasa por A y B .
- [b] Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por C .
- [c] Hallar $D = L \cap \pi$.
- [d] Hallar $d(A, B)$ y $d(C, D)$.
- [e] Usando los ítems anteriores, calcular el área del triángulo de vértices A, B y C .
- 4.23.** Sea π el plano $x + y + z = 1$. Sea L la recta $t(-1,0,1) + (1,1,2)$.
- [a] Probar que L es paralela a π .
- [b] Probar que $P = (2,1,1) \in L$.
- [c] Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por $P = (2,1,1)$.
- [d] Hallar $Q = L' \cap \pi$.
- [e] Hallar $d(P, Q)$.
- [f] ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?