

## Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)

### Trabajo Práctico N° 4

### Geometría

- 4.1.** En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta  $L$ :
- [a]  $L : t(-2,3) + (2,2)$ ;  $P_1 = (2,2)$ ,  $P_2 = (-2,3)$ ,  $P_3 = (0,0)$ ,  $P_4 = (12,-13)$ ,  
 $P_5 = (2,-1)$ .
- [b]  $L : t(-1,1) + (3,-3)$ ;  $P_1 = (3,-3)$ ,  $P_2 = (0,0)$ ,  $P_3 = (-1,1)$ ,  $P_4 = (3,4)$ ,  
 $P_5 = (6,6)$ .
- 4.2.** Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación implícita y la ecuación explícita de la recta que:
- [a] Pasa por  $P = (-1,2)$  y está dirigida por  $v = (3,1)$ .
- [b] Pasa por  $P = (4,5)$  y está dirigida por  $v = (0,3)$ .
- [c] Pasa por  $A = (1,-4)$  y  $B = (-1,-3)$ .
- [d] Es paralela a  $L : t(-2,3) + (1,-1)$  y pasa por  $P = (1,-4)$ .
- [e] Pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por  $(4,-5)$  y  $(\frac{1}{2},3)$ .
- [f] Es perpendicular a  $L : t(2,3) + (5,7)$  y pasa por  $P = (1,-3)$ .
- 4.3.** Graficar y dar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta de ecuación:
- [a]  $y = 3x - 2$ .
- [b]  $2x - 3y = 5$ .
- [c]  $y = 4$ .
- [d]  $x = -5$ .
- 4.4.** En cada uno de los siguientes casos, dar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que:
- [a] Está dirigida por  $v = (0,1,0)$  y pasa por  $P = (0,2,4)$ .
- [b] Está dirigida por  $v = (1,2,3)$  y pasa por  $P = (3,0,4)$ .
- [c] Pasa por los puntos  $(-2,3,4)$  y  $(-1,3,1)$ .
- [d] Es paralela al eje  $z$  y pasa por  $(1,2,3)$ .
- [e] Es paralela a  $L : t(2,4,-5) + (0,3,-1)$  y pasa por  $P = (3,-1,2)$ .
- [f] Es perpendicular a  $L : t(1,-2,1) + (3,5,6)$  y pasa por  $P = (1,9,-3)$ . ¿Es única?
- 4.5.** Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por los vectores  $v$  y  $w$  que pasa por el punto  $P$  en los siguientes casos:
- [a]  $v = (0,1,0)$ ,  $w = (1,0,0)$  y  $P = (0,0,1)$ .
- [b]  $v = (0,2,0)$ ,  $w = (1,1,0)$  y  $P = (0,1,1)$ .
- [c] Graficar los planos hallados en [a] y en [b] y compararlos.

## 4.6.

- [a] Dar las ecuaciones paramétricas de un plano que contenga al eje  $z$  y a la recta dirigida por  $v = (1,2,1)$  que pasa por el origen.
- [b] Dar las ecuaciones paramétricas de la recta que está en la intersección del plano  $xz$  con el plano  $yz$ .
- [c] Dar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos  $(2,1,3)$  y  $(3,-2,5)$ .
- [d] Dar la ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos  $(2,1,2)$ ,  $(1,1,1)$  y  $(3,2,7)$ .
- [e] Dar la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto  $(1,2,-2)$  y es paralelo al plano que contiene a los ejes  $x$  e  $y$ .
- [f] Dar la ecuación vectorial del plano que es paralelo a la recta  $r : t(1,2,-4) + (1,2,1)$  y contiene a los puntos  $P = (2,2,1)$  y  $Q = (1,2,-3)$ .

## 4.7.

- [a] Decidir si los puntos  $A = (1,1,1)$ ,  $B = (-2,0,1)$  y  $C = (3,2,0)$  son colineales (están sobre una misma recta) o no.
- [b] Decidir si los puntos  $A = (8,2,4)$ ,  $B = (4,2,8)$ ,  $C = (-2,0,1)$  y  $D = (1,-1,3)$  son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

4.8. Dado el plano  $\pi : 2x - 5y + 3z = 11$ :

- [a] Hallar todos los  $a \in R$  para los cuales  $(2, a, 7) \in \pi$ .
- [b] ¿Existe  $a \in R$  tal que  $(0, 3a, 5a) \in \pi$ ?

4.9. Sea  $\pi$  el plano que contiene a la recta  $L : t(1,-2,1) + (1,0,2)$  y al punto  $(2,2,3)$ .

- [a] Decidir si los puntos  $P = (1,-2,1)$  y  $Q = (3,4,4)$  pertenecen o no a  $\pi$ .
- [b] Encontrar todos los  $a \in R$  tales que  $(a, 2a + 1, a - 3) \in \pi$ .

4.10. Determinar, en cada uno de los siguientes casos, si las rectas  $L$  y  $L'$  resultan paralelas, coincidentes, concurrentes o alabeadas:

- [a]  $L : t(1,0,-1) + (-1,1,2)$ ;  $L' : t(-1,1,2) + (1,0,-1)$ .
- [b]  $L : t(1,1,-1) + (-1,2,2)$ ;  $L' : t(2,2,-2) + (1,0,-1)$ .
- [c]  $L : t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1,1,2)$ ;  $L' : t(-2,-1,2) + (-3,2,0)$ .
- [d]  $L : t(1,0,-1) + (-1,1,2)$ ;  $L' : t(1,-2,6) + (3,3,-3)$ .
- [e]  $L : t(1,2,-1) + (-1,-1,2)$ ;  $L' : t(-1,1,1) + (3,2,-1)$ .

## 4.11.

- [a] Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto  $(-1,2,2)$  y es ortogonal a la recta  $L : t(1,1,-1) + (-1,2,2)$
- [b] Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por  $P = (2,1,7)$  y está dirigido por los vectores  $v = (1,0,4)$  y  $w = (4,-1,3)$ .
- [c] Dar las ecuaciones paramétricas del plano  $\pi : 2x - y + 3z = 1$ .

- 4.12.** Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano  $\pi$  y pasa por  $P$ :
- [a]  $P = (1, -1, 2)$ ;  $\pi$  pasa por los puntos  $(0, 2, 0)$ ,  $(-1, 1, 2)$  y  $(0, 5, 5)$ .
- [b]  $P = (3, 3, 3)$ ;  $\pi$  está dirigido por  $v = (1, 2, 1)$  y  $w = (-2, 2, -3)$  y pasa por  $(0, 5, 4)$ .
- [c]  $P = (2, 1, 0)$ ;  $\pi : 3x - y + 2z = 4$ .
- [d]  $\pi : y = 3$ ;  $P$  es la intersección de las rectas  $L : t(1, 1, 1) + (1, 0, 1)$  y  $L' : t(1, -1, 2) + (0, 3, -2)$ .
- 4.13.** Determinar en qué casos los planos  $\pi$  y  $\alpha$  se intersecan o no. En los casos en que sea posible hallar la intersección.
- [a]  $\pi : 3x - 2y + 4z = 1$ ;  $\alpha$  está dirigido por  $v = (2, 2, 0)$  y  $w = (-3, 2, 1)$  y pasa por el punto  $(2, 2, 2)$ .
- [b]  $\pi$  pasa por  $A = (3, 1, 4)$ ,  $B = (2, 0, 2)$  y  $C = (1, -1, -1)$ ;  $\alpha : 3x - 2y - 1 = 0$ .
- [c]  $\pi : 4x + 2y - 3z = 1$ ;  $\alpha : 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$ .
- [d]  $\pi : 2x - y = 2$ ;  $\alpha$  pasa por  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 0, -2)$  y  $C = (2, 2, 3)$ .
- [e]  $\pi$  pasa por  $(-1, 1, 2)$  con vector normal  $N = (1, 2, -1)$ ;  $\alpha$  pasa por  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (2, 3, 1)$  y  $C = (-1, -2, 2)$ .
- 4.14.** Sea  $L$  la recta que pasa por  $P = (1, k - 3, -2k)$  y  $Q = (k^2, -k + 2, -1)$  y sea  $\pi$  el plano de normal  $N = (1, 1, -1)$  que pasa por  $A = (-5, -5, 7)$ . Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  tales que  $L \cap \pi = \emptyset$ .
- 4.15.**
- [a] Encontrar todos los puntos de  $\mathbb{R}^3$  que distan 6 de  $(2, 1, -1)$  y que además pertenezcan a la recta  $(x, y, z) = \lambda(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$ .
- [b] Hallar el punto  $Q$  de la recta  $(x, y, z) = t(2, -1, 4)$  más próximo al punto  $P = (-4, 8, 1)$ .
- 4.16.**
- [a] Sean en  $\mathbb{R}^2$ ,  $A = (-1, 1)$  y  $L : (x, y) = \mu(1, 1) + (3, 0)$ . Calcular la distancia de  $A$  a  $L$ .
- [b] Sean en  $\mathbb{R}^3$ ,  $A = (-1, 1, 0)$  y  $L : (x, y, z) = \mu(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$ . Calcular la distancia de  $A$  a  $L$ .
- [c] Sea  $\pi$  el plano cuyo vector normal es  $N = (1, -1, 2)$  y pasa por  $(1, 2, 1)$ . Calcular la distancia entre el punto  $(1, 2, 5)$  y el plano  $\pi$ .
- 4.17.** Un punto se desplaza por el espacio, de modo que en el instante  $t$  su posición viene dada por el vector  $x(t) = (1 - t)e_1 + (2 - 3t)e_2 + (2t - 1)e_3$ .
- [a] Probar que el punto se mueve a lo largo de una recta.
- [b] ¿En que instante  $t$  el punto toca al plano  $\pi : -2x + 3y + 2z = 0$ ?
- [c] Calcular, para cada valor de  $t$ , la distancia del punto al plano  $\pi$ .
- [d] ¿Cuál es el valor de  $t$  para el cual el punto está más cerca del origen? ¿A que distancia está?

- 4.18.** Sea  $L_1$  la recta que tiene dirección  $(1,2,-1)$  y pasa por  $(-1,3,1)$ . Sea  $L_2$  la recta que pasa por  $(-1,1,3)$  y por  $(1,2,7)$ .
- [a] Determinar si  $L_1$  y  $L_2$  se intersecan o no.
- [b] Si  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ , hallar un plano que contenga a  $L_1$  y  $L_2$  y hallar el ángulo entre  $L_1$  y  $L_2$ .
- [c] Si  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ , determinar una recta  $L_3$  paralela a  $L_1$  que interseque a  $L_2$  en el punto  $(-1,1,3)$  y hallar el ángulo entre  $L_3$  y  $L_2$ .
- 4.19.**
- [a] Calcular el ángulo entre las rectas de  $R^2$   $L_1 : x - y = 1$  y  $L_2 : x + y = 3$ .
- [b] Hallar una recta  $L_3$  tal que  $\angle(L_1, L_2) = \angle(L_1, L_3)$  y  $L_1 \cap L_2 \in L_3$ .
- 4.20.**
- [a] Hallar las ecuaciones implícitas de la recta que es intersección del plano  $xy$  con el plano  $yz$ .
- [b] Hallar las ecuaciones implícitas de la recta  $L : t(1,0,-1) + (-1,1,2)$ .
- [c] Hallar las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos  $(-5,3,7)$  y  $(2,-3,3)$ .
- 4.21.** Considere las rectas:  $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 9 \end{cases}$  y  $L_2 : \alpha(1,0,2) + (1,2,-3)$ .
- [a] Probar que  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas.
- [b] Probar que  $P = (2,2,-1) \in L_2$ .
- [c] Hallar un plano  $\pi$  perpendicular a  $L_2$  que pase por  $P$ .
- [d] Hallar  $Q = L_1 \cap \pi$ .
- [e] Hallar  $d(P, Q)$ .
- [f] ¿Qué significa en este problema el número  $d(P, Q)$ ?
- 4.22.** Sean  $A = (0,2,2)$ ,  $B = (2,0,-1)$  y  $C = (0,-2,-1)$ .
- [a] Hallar la recta  $L$  que pasa por  $A$  y  $B$ .
- [b] Hallar el plano  $\pi$  perpendicular a  $L$  que pasa por  $C$ .
- [c] Hallar  $D = L \cap \pi$ .
- [d] Hallar  $d(A, B)$  y  $d(C, D)$ .
- [e] Usando los ítems anteriores, calcular el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ .
- 4.23.** Sea  $\pi$  el plano  $x + y + z = 1$ . Sea  $L$  la recta  $t(-1,0,1) + (1,1,2)$ .
- [a] Probar que  $L$  es paralela a  $\pi$ .
- [b] Probar que  $P = (2,1,1) \in L$ .
- [c] Hallar una recta  $L'$  ortogonal a  $\pi$  que pase por  $P = (2,1,1)$ .
- [d] Hallar  $Q = L' \cap \pi$ .
- [e] Hallar  $d(P, Q)$ .
- [f] ¿Qué significa en este problema el número  $d(P, Q)$ ?