Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)
Trabajo Práctico N° 5
Subespacios, Rango de una matriz

5.1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial correspondiente:

[a] $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\} \subset R^2$.

[b] $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \cdot x_2 = 0\} \subset R^2$

[c] $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : {x_1}^2 < -1\} \subset R^2$.

[d] $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_2 = 0\} \subset R^3$.

[e] $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : {x_1}^2 - 4{x_2}^2 = 0\} \subset R^3$.

[f] $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5 : x_1 - 2x_3 + x_5 = 0,\ 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0,\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\} \subset R^5$.

5.2. Sea $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 - x_2 = a\} \subset R^2$, $a \in R$.

[a] Dibujar S.

[b] Probar que S es un subespacio de $R^2 \Leftrightarrow a = 0$.

5.3. Sea $A \in R^{mxn}$. Probar que $S = \{v \in R^n : A \cdot v^t = 0\}$ es un subespacio de R^n (el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo).

5.4. Dibujar los siguientes subconjuntos de R^2 y analizar si son subespacios o no:

[a] $\{\lambda \cdot (1,2) : \lambda \in R\}$.

[b] $\{\lambda \cdot (1,2) + (2,2) : \lambda \in R\}$.

[c] $\{\lambda \cdot (1,-2) + (-2,4) : \lambda \in R\}$.

[d] $\{\lambda \cdot (1,2) + \mu \cdot (2,2) : \lambda, \mu \in R\}$.

[e] $\{\lambda \cdot (1,2) + \mu \cdot (2,4) : \lambda, \mu \in R\}$.

[f] $\{\lambda \cdot (1,2) + \mu \cdot (2,2) : \lambda, \mu \in R; \lambda + \mu = 1\}$.

5.5. Sea V un espacio vectorial real, y sean $v_0, v_1, v_2 \in V$.

[a] Probar que $S = \{k.v_0 : k \in R\}$ es un subespacio de V.

[b] Probar que $S' = \{k_1.v_1 + k_2.v_2 : k_1, k_2 \in R\}$ es un subespacio de V.

[c] Describir geométricamente S y S'.

5.6. Sean $v = (2,3)$ y $w = (1,-1)$.

[a] ¿Es el vector $u = (1,2)$ combinación lineal de v y w?

[b] ¿Es el vector $u = (0,0)$ combinación lineal de v y w?

5.7. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

[a] $S = \langle (1,2,3) \rangle$, $v = (3/5, 6/5, 9/5)$.

[b] $S = \langle (1,2,3), (1/2, 1, 3/2) \rangle$, $v = (-5,-10,-15)$.

[c] $S = \langle (1,-1,2,1), (2,1,3,0) \rangle$, $v = (3,0,6,1)$.

5.8.

[a] Hallar dos subespacios distintos de R^3 que contengan al vector $(1,3,2)$.

[b] Hallar un subespacio de R^3 que contenga al vector $(1,1,0)$ y no contenga al vector $(0,1,1)$.

5.9. Hallar un sistema de generadores para cada subespacio de los ejercicios anteriores.

5.10. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan R^n o no:

[a] $n = 2$, $\{(1,1),(1,-1)\}$.

[b] $n = 2$, $\{(1,-1),(-2,2)\}$.

[c] $n = 2$, $\{(1,1),(1,-1),(3,4)\}$.

[d] $n = 3$, $\{(1,1,-1),(0,1,1),(1,2,1)\}$.

[e] $n = 3$, $\{(1,1,-1),(0,1,1),(1,2,0)\}$.

[f] $n = 3$, $\{(1,1,-1),(0,1,1),(1,2,1),(3,-2,1)\}$.

[g] $n = 8$, $\{(1,1,-1,2,3,0,0,-2),(0,1,1,5,-7,8,1,0),(1,2,0,7,-4,8,1,-2)\}$.

5.11. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

[a] $\{(1,-3,5),(-2,2,1),(-1,-1,6)\} \subset R^3$.

[b] $\{(1,2,3,4,5)\} \subset R^5$.

[c] $\{(1,2,2,-1),(0,2,-2,-3),(1,1,0,2),(0,1,-1,0)\} \subset R^4$.

[d] Cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.10.

[e] $\{v\}$, con $v \in V$ (un espacio vectorial real).

[f] $\{v_1, v_2\}$, con $v_1, v_2 \in V$ (un espacio vectorial real).

[g] $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n, 0\} \subset V$ (un espacio vectorial real).

5.12. Hallar (si es posible) tres vectores de R^3 linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

5.13. Determinar todos los $k \in R$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes:

[a] $\{(0,-1,k),(1,-1,2),(-1,0,2)\} \subset R^3$.

[b] $\{(1,-1,2),(k+1,k,k+6),(k,k+1,1)\} \subset R^3$.

[c] $\{(k-2,k,1,0),(0,k,0,0),(1,1,0,k-1),(2,-1,-1,k-1)\} \subset R^4$.

5.14. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores son o no base del espacio vectorial correspondiente. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender a una base.

[a] $\{(1,0,1),(0,1,1)\} \subset R^3$.

[b] $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0)\} \subset R^3$.

[c] $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)\} \subset R^3$.

[d] $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,0,1),(1,1,1)\} \subset R^3$

[e] Cada uno de los conjuntos de los ejercicios 5.10 y 5.11.

5.15. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los subespacios de los ejercicios anteriores.

5.16. Sea $S = \langle (0,-1,k),(1,-1,0),(-1,0,2) \rangle \subset R^3$. Estudiar la dimensión del subespacio S en función de k.

5.17. Sean en R^4 los siguientes subespacios:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\} \text{ y}$$

$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = 0,\ x_2 - x_4 = 0,\ x_1 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

[a] Hallar bases de S y de T.

[b] Hallar una base del subespacio $S \cap T$.

[c] Hallar una base del subespacio generado por $S \cup T$.

[d] ¿Qué relación existe entre las dimensiones de S, de T, de $S \cap T$ y del subespacio generado por $S \cup T$?

[e] Mismas preguntas ([a] a [d]) para los subespacios de R^3:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \text{ y } T = \langle (1,1,1),(0,-2,0) \rangle.$$

[f] Mismas preguntas ([a] a [d]) para los subespacios de R^3:

$$S = \langle (1,1,2),(1,-1,0) \rangle \text{ y } T = \langle (2,0,-1),(1,0,-\tfrac{1}{2}) \rangle.$$

[g] Mismas preguntas ([a] a [d]) para los subespacios de R^4:

$$S = \langle (1,2,3,-1);(0,-1,2,0);(2,0,1,-2);(-1,-2,-1,1) \rangle \text{ y}$$

$$T = \langle (1,2,1,3);(0,-1,0,2);(2,0,2,1);(-1,-1,-1,-2) \rangle.$$

5.18. Sean en R^4 los siguientes subespacios:

$$S = \langle (0,1,2,0),(1,2,0,\lambda) \rangle \text{ y } T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0,\ -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

[a] Hallar todos los $\lambda \in R$ para los cuales $S \cap T \neq \{0\}$.

[b] Para cada valor λ hallado en [a], encontrar una base de $S \cap T$.

5.19. Sean en R^4 los siguientes subespacios:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_4 = 0,\ x_3 - x_4 = 0\} \text{ y}$$

$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

[a] Hallar todos los $a,b \in R$ para los cuales $(1,a,-2,b) \in S \cap T$.

[b] Exhibir dos bases distintas de $S \cap T$.

[c] ¿Es posible dar un conjunto de tres vectores linealmente independientes en el subespacio $S \cap T$?

5.20. Para cada una de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

[a] Calcular la dimensión y una base del espacio fila.
[b] Calcular la dimensión y una base del espacio columna.
[c] Calcular el rango.
[d] Calcular la dimensión y una base del núcleo.
[e] Mismos cálculos ([a] a [d]) para las respectivas matrices transpuestas.

5.21. Sean $A, B \in R^{3x4}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[a] Hallar bases y dimensión de $N(A)$ y $N(B)$.
[b] Hallar una base y la dimensión de $N(A) \cap N(B)$.
[c] Hallar una base de $N(A) \cap N(A^t \cdot A)$.

5.22. Sea $A \in R^{mxn}$.

[a] Si $m = n = 10$ y $rg(A) = 6$; calcular $dim(N(A))$.
[b] Si $m = 7$, $n = 8$ y $rg(A) = 2$; calcular $dim(N(A))$.
[c] Si $m = 4$, $n = 5$ y $dim(N(A)) = 3$; calcular $rg(A)$.
[d] Si $m = 3$, $n = 5$ y $dim(E_C(A^t)) = 3$; calcular $dim(N(A))$.
[e] Si $m = 3$, $n = 4$ y $dim(E_C(A)) = 2$; calcular $dim(N(A))$.
[f] Si $m = 4$, $n = 4$ y $dim(E_C(A)) + dim(E_C(A^t)) = 6$; calcular $dim(N(A))$.

5.23. Sea $A \in R^{4x5}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

[a] Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.
[b] Calcular $dim(N(A))$, $dim(N(A^t))$, $dim(E_F(A))$, $rg(A)$ y $rg(A^t)$.

5.24. Sea $A \in R^{4x3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b tales que el $N(A)$ coincida con las soluciones del sistema $\begin{cases} ax + y + bz = 0 \\ 2ax - y + bz = 0 \end{cases}$.

5.25. Sea $A \in R^{4x3}$ tal que $dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in R^{4x1}$. ¿Cuál debe ser el rango de la matriz ampliada $[A, b] \in R^{4x4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución?

5.26. Sea $A \in R^{3x2}$ tal que $rg(A) = 2$.

[a] ¿Tiene el sistema $A \cdot x = 0$, solución no nula?

[b] Calcular la dimensión del espacio de soluciones del sistema $A^t \cdot x = 0$.

5.27. Sea $A \in R^{3x4}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

[a] Hallar todos los $b \in R$ para los cuales $rg(A) = 2$.

[b] Para cada b hallado en [a], analizar si $v = (3,2,2) \in E_C(A)$.

[c] Para cada b hallado en [a], hallar una base de $N(A^t)$.

5.28. Para cada uno de los siguientes subespacios "S", hallar $n, m \in N$ y $A \in R^{mxn}$ tales que $S = N(A)$.

[a] $S = \langle (1,3) \rangle$.

[b] $S = \langle (1,3,1), (-2,1,0) \rangle$.

[c] $S = \langle (1,3,1), (-2,1,0), (-1,4,1) \rangle$.

[d] $S = \langle (1,3,1,-2), (-2,1,0,3), (-1,4,1,1), (3,2,1,-5) \rangle$.

5.29. Sean en R^4 los siguientes subespacios:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_3 + x_4 = 0\} \text{ y } T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_4 = 0\}.$$

[a] Hallar la dimensión y una base de $S \cap T$.

[b] Exhibir tres vectores distintos de R^4 que no sean combinación lineal de los elementos de la base de $S \cap T$ dada en [a].

[c] Dar n, m y dos matrices distintas $A, B \in R^{mxn}$ tales que $A \cdot v^t = B \cdot v^t = 0$ para todo $v \in S \cap T$.

5.30. Sean $A \in R^{4x3}$, $B \in R^{3x4}$ y $C \in R^{4x4}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ y se verifica que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$:

[a] Hallar el $rg(A \cdot B \cdot A)$ y la $dim(N(A \cdot B \cdot A))$.

[b] Hallar una base del $N(A \cdot B \cdot A)$.

5.31. Dados los subespacios de R^3:
$S=\{(x_1,x_2,x_3): 2x_1-x_2+x_3=0,\ -4x_1+2x_2-2x_3=0\}$ y
$T=\langle(2,3,-1);(-2,1,5);(4,2,-6)\rangle$.

[a] Probar que $T\subset S$.
[b] Calcular las dimensiones de S y de T.
[c] ¿Es $T=S$? Justifique su respuesta.

5.32. Dados los subespacios de R^4:
$$S=\{x\in R^4: x_1-2x_2+x_3=-x_1+2x_2+(\alpha+2)x_3+x_4=0\} \text{ y}$$
$T=\{x\in R^4: -x_1+(\alpha^2-7)x_2-x_3+2x_4=x_1+(\alpha^2-11)x_2+(2\alpha+7)x_3+2x_4=0\}$.

[a] Calcular la dimensión de $S\cap T$ en función del parámetro α.
[b] Para cada α tal que $dim(S\cap T)=1$, hallar una base de $S\cap T$.
[c] Para cada α tal que $dim(S\cap T)=2$, hallar una base de $\overline{S\cup T}$.

5.33. Sea $A\in R^{4x4}$,
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & (k+2) & (k+3) \\ -1 & (k^2-7) & -1 & (-2k-6) \\ 1 & (k^2-11) & (2k+7) & (k-9) \end{pmatrix}.$$

[a] Hallar <u>todos</u> los $k\in R$ para los cuales $dim(N(A))=dim(E_F(A^t))$.
[b] Para cada k hallado en a), calcular una base del $N(A)$ y una base del $N(A^t)$.

5.34. Sean S y T subespacios de R^6 tales que $dim(S)=3$ y $dim(T)=4$.

[a] ¿Puede ser que $T\subset S$?
[b] ¿Puede ser $dim\langle S\cup T\rangle=7$?
[c] ¿Puede ser $dim(S\cap T)=4$?
[d] ¿Puede ser $S\cap T=\{0\}$?
[e] Si $dim(S\cap T)=3$, ¿qué puede decir de S y T?
[f] Si $dim\langle S\cup T\rangle=4$, ¿qué puede decir de S y T?
[g] Si $S\subset T$, calcule $dim\langle S\cup T\rangle$ y $dim(S\cap T)$.

5.35. Sean $P\in R^{5x5}$ y $Q\in R^{5x3}$ tales que $rg(P)+dim(N(Q))=6$ y $dim(E_F(P^t))=5$.
$$\text{Sea } W=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\in R^{4x5}.$$

[a] Calcular $dim(N(P))$, $rg(P)$, $dim(N(Q))$ y $rg(Q)$.
[b] Hallar la $dim(E_C(Q^t\cdot P^{-1}))$.
[c] Hallar la $dim(N(W\cdot P^{199})^t)$.