Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)
Trabajo Práctico N° 7
<u>Diagonalización</u>

7.1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

[a] $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$; **[b]** $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; **[c]** $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **[d]** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

[e] $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **[f]** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$; **[g]** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

[h] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **[i]** $\begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.2. En cada uno de los siguientes casos, analizar si la matriz A es o no diagonalizable. En los casos que lo sea, hallar una base de R^n de autovectores de A y hallar la matriz inversible C que diagonaliza a A.

[a] $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **[b]** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; **[c]** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$;

[d] $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$; **[e]** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **[f]** $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

[g] $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; **[h]** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **[i]** $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

[j] $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

[a] Probar que A es diagonalizable.
[b] Hallar una base de R^2 de autovectores de A.
[c] Hallar la matriz inversible C que diagonaliza a A.
[d] Calcular A^{10}.

7.4. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

[a] Hallar todos los $k \in R$ para los cuales $\lambda = 1$ es autovalor de A.
[b] Para cada k hallado en [a], hallar una base del autoespacio $S_1(A)$.
[c] Hallar todos los $k \in R$ para los cuales $\lambda = 2$ es autovalor de B.
[d] Para cada k hallado en [c], hallar una base del autoespacio $S_2(B)$.

7.5. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2}$. Probar que:

[a] $(a-d)^2 + 4bc > 0 \Rightarrow A$ es diagonalizable.
[b] $(a-d)^2 + 4bc < 0 \Rightarrow A$ <u>no</u> es diagonalizable.
[c] ¿Qué se puede afirmar si $(a-d)^2 + 4bc = 0$?

7.6. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in R^{3x3}.$$

[a] Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
[b] Hallar los autovalores de A^3 y los autovectores asociados.
[c] Hallar los autovalores de A^9 y los autovectores asociados.

7.7. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$ y sea $v = (1,2,0) \in R^3$.

[a] Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
[b] Probar que A es diagonalizable y hallar la matriz inversible C que diagonaliza a A.
[c] Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A.
[d] Escribir al vector v como combinación lineal de la base de R^3 de autovectores de A.
[e] Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A.

7.8. Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$ y sea $v = (-2,2,-3) \in R^3$.

[a] Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
[b] Probar que A <u>no</u> es diagonalizable.
[c] Escribir al vector v como combinación lineal de los autovectores de A.
[d] Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

7.9. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$.

[a] Hallar todos los $b \in R$ para los cuales 3 es autovalor de A.
[b] Para cada b hallado en [a], hallar todos los $a \in R$ para los cuales A <u>no</u> es diagonalizable.

7.10. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$. Hallar todos los $a \in R$ para los cuales A <u>no</u> es diagonalizable.

7.11. Sea $A = \begin{pmatrix} (2a+4) & (1-a) & (-2a-a^2) \\ 0 & (4-a) & 0 \\ 0 & 0 & (4-a^2) \end{pmatrix} \in R^{3x3}$.

Hallar <u>todos</u> los $a \in R$ para los cuales A <u>no</u> es diagonalizable. Justificar.

7.12. Sea $A \in R^{3x3}$,

$$A = \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 & 0 \\ b^3 - b & a^2 - 1 & 0 \\ b^2 - 1 & b^2 - b & a^3 - a \end{pmatrix}.$$

[a] Hallar <u>todos</u> los $a \in R$, para los cuales A posee un autovalor triple.
[b] Para cada a hallado en [a], determine <u>todos</u> los $b \in R$ para los cuales A es diagonalizable.

7.13. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$.

[a] ¿Es A diagonalizable?
[b] Hallar todos los $a \in R$ tales que $(2a+6, a^2-4, 2)$ es autovector de A.

7.14. Sea $A=\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$.

[a] Encuentre <u>todos</u> los $a \in R$ para los cuales A <u>no</u> es diagonalizable.

[b] Para cada a hallado en el inciso anterior, determine <u>todos</u> los $b \in R$ para los cuales $(0, b^2+1, 2)$ es autovector de A.

7.15. Sea $A=\begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$.

Se sabe que $v=(1,2,0)$, $w=(2,6,0)$ y $u=(-2,-2,-1)$ son autovectores de A.

[a] Calcular los autovalores de A.

[b] Analizar si A es o no diagonalizable.

[c] Calcular r, s y t.

7.16. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in R^{3x3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1,1,1) \in N(A-I)$.

[a] Determinar a, b y c.

[b] Hallar todos los autovalores de A y una base de los autoespacios correspondientes.

[c] ¿Es A diagonalizable?

7.17. Sea $A \in R^{3x3}$ tal que $-1, 1$ y 2 son autovalores de A.

[a] ¿Es A inversible?

[b] ¿Es A diagonalizable?

[c] Probar que $B = A^2 + 3A - I$ es diagonalizable.

7.18. Sea $A \in R^{3x3}$ tal que $0, 1$ y 5 son autovalores de A.

[a] ¿Es A inversible?

[b] ¿Es A diagonalizable?

[c] Calcular los autovalores de $B = (3A-4I)^3$.

[d] Calcular los autovalores de $F = 5A^t + 4I$.

[e] Probar que $H = A + I$ es inversible. Calcular los autovalores de H^{-1}. ¿Es H diagonalizable?

[f] Hallar <u>todos</u> los $\alpha \in R$ para los cuales $G = \alpha \cdot A + 3I$ <u>no</u> es inversible.

7.19. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sea $B = 2A^t + I$.

[a] Hallar todos los $\alpha \in R$ para los cuales $\lambda = 1$ es autovalor de A.

[b] Hallar todos los $\alpha \in R$ para los cuales $\lambda = 25$ es autovalor de B^2.

[c] Para cada α hallado en [b], analizar si $\lambda = 5$ es o no autovalor de B.

7.20. Hallar <u>todos</u> $k \in R$ para los cuales la matriz

$$\begin{pmatrix} k & k^2 & 3k^4 & 5k-8 & k-3 \\ k^2 & -7 & 5k-2 & -4 & 14 \\ 3k^4 & 5k-2 & -2k^3+k-2 & 0 & k^4 \\ 5k-8 & -4 & 0 & 3k-7 & (k-3)^2 \\ k-3 & 14 & k^4 & (k-3)^2 & -10 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

7.21. Sea $A \in R^{3x3}$ <u>diagonalizable</u> tal que $\frac{1}{2}$ es raíz de X_A de multiplicidad 3. Sean $B = 2A + 3I$ y $H = (A - I)^3$.

[a] ¿Es A inversible?

[b] Calcular $det(B)$ y $tr(B)$.

[c] Calcular $det(H)$ y $tr(H)$.

7.22. Sea $A \in R^{3x3}$ tal que $1, 2$ y 3 son raíces de X_A. Sean $B = 5A^2 + 3A - 2I$, $H = (A^2 - A)$ y $G = 4A^2 + \alpha \cdot I$.

[a] Probar que A es inversible.

[b] Calcular $det(A^{-1})$ y $tr(A^{-1})$.

[c] Calcular $det(B)$ y $tr(B)$.

[d] Calcular $det(H)$ y $tr(H)$.

[e] Hallar <u>todos</u> los $\alpha \in R$ para los cuales G <u>no</u> es inversible.

7.23. Sea $A \in R^{3x3}$ tal que $dim(N(A)) = 1$, $rg(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

[a] Calcular los autovalores de A.

[b] ¿Es A inversible?

[c] ¿Es A diagonalizable?

7.24. Sea $A \in R^{3x3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A, $tr(A) = 2$ y $det(A) = -2$.

[a] Hallar <u>todos</u> los autovalores de A.

[b] ¿Es A^t diagonalizable? Justificar.

7.25. Sea $A \in R^{3x3}$ inversible tal que $tr(A) = -2$, $rg(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$, $X_{A^t}(1) = 8$.

Probar que A es diagonalizable. Justificar con claridad.

7.26. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in R^{4x4}$.

[a] Calcular $det(A)$ y $tr(A)$.

[b] Probar que $A^4 - 7A^3 + 17A^2 - 17A + 6I = 0$.

7.27. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$.

[a] Probar que $A^3 - 4A^2 + 10A = 15I$.

[b] Probar que $A^3 - A^2 + 6A - 12I = 3A^2 - 4A + 3I$.