Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)
Trabajo Práctico N° 3
<u>Matrices</u>

3.1. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Calcule:

[a] $3A-2B+C)$.
[b] $A-3(B-C)$.
[c] $A-(B-2C)$.
[d] $A-B+2C$.

3.2. Dadas las matrices $A\in R^{4x5}$, $B\in R^{5x7}$, $C\in R^{4x5}$ y $D\in R^{7x5}$, indique cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En el caso afirmativo, indique el tamaño (número de filas y número de columnas) de la matriz resultado.

[a] $A\cdot B$.
[b] $B\cdot A$.
[c] $A\cdot C$.
[d] $C\cdot B$.
[e] $B\cdot D\cdot A$.
[f] $A\cdot B\cdot D$.

3.3. Cuando sea posible, calcule $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

[a] $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

[b] $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$.

[c] $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 5\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

[d] $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

3.4. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad “ $A\cdot B=0 \Rightarrow A=0$ ó $B=0$ ” no es válida para matrices.

3.5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, calcule:

[a] A^2.
[b] B^3.
[c] $2A^2 + B^3 A$.
[d] $X \in R^{3x3}$ que verifique que $3X - 2A = 5B$.

3.6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, analice si valen para matrices las fórmulas clásicas de factorización:

[a] $(A + B).(A - B) = A^2 - B^2$.
[b] $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

3.7. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule:

[a] A^t, B^t y C^t.
[b] $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.
[c] $(A \cdot B)^t \cdot C$, $(C^t \cdot (A \cdot B))^t$, $B^t \cdot A^t \cdot C$ y $B^t \cdot (C^t \cdot A)^t$.

3.8. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in R^{2x2}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3x3}$. Calcule:

[a] $A^2 + A^3$.
[b] A^{15}.
[c] A^{1000}.
[d] A^n, $n \in N$.
[e] Idem, [a], [b], [c] y [d] para la matriz B.

3.9. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcule los siguientes productos y analice qué le sucede a la matriz B:

[a] $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot B$. **[b]** $B \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$.
[c] $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B$. **[d]** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot B$.

3.10. Dada la matriz $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, calcule los siguientes productos y analice qué le sucede a la matriz C.

[a] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C$. **[b]** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C$. **[c]** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \cdot C$.

3.11. Si existieran, dé ejemplos de matrices $A \in R^{2x2}$, que no sean idénticamente nulas ni la identidad, y tales que:

[a] $A^2 = I$.
[b] $A^2 = \Theta$ (matriz nula).
[c] $A^2 = A$
[d] $A \cdot B = B \cdot A \quad \forall B \in R^{2x2}$.

3.12. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

[a] Verifique que A, B y C son inversibles y calcule A^{-1}, B^{-1} y C^{-1}.
[b] Calcule $(A \cdot B)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.
[c] Calcule $(A \cdot B)^{-1} \cdot C$, $(C^{-1} \cdot (A \cdot B))^{-1}$, $B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$ y $B^{-1} \cdot (C^{-1} \cdot A)^{-1}$.

3.13. Calcule, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices. Verifique que la matriz hallada es la inversa:

[a] $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **[b]** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **[c]** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

[d] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **[e]** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **[f]** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[g] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **[h]** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **[i]** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.14. Considere el sistema lineal

$$S:\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = -6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 9 \end{cases}.$$

[a] Reescriba el sistema como producto de matrices (notación matricial).
[b] Idem [a] para el sistema homogéneo asociado.

3.15. En cada uno de los siguientes casos, reescriba, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal $A \cdot \bar{x} = b$ y describa el conjunto $\{x \in R^n : A \cdot x^t = b\}$.

[a] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

[b] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.16. En cada uno de los siguientes casos, halle <u>todas</u> las $X \in R^{2x2}$ tales que:

[a] $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[b] $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

[c] $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$.

[d] $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$.

3.17. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5a & 2(b-3) \\ 2 & a+4 \end{pmatrix}$.

[a] Hallar <u>una</u> $X \in R^{2x2}$ tal que $A \cdot X = X \cdot A$.

[b] Hallar <u>todos</u> los $a, b \in R$ para los cuales $A \cdot B = B \cdot A$.

3.18. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Hallar <u>todas</u> las $X \in R^{2x2}$ que verifique $A \cdot X + 2X = B^t X + \frac{1}{2} C$.

3.19. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Hallar <u>todas</u> las $X \in R^{3x3}$ tal que $A \cdot X = 2 \cdot X + B^t$.