

Elementos de Cálculo Numérico (Ciencias Biológicas)

Trabajo Práctico N° 6

Determinantes

6.1. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$[a] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad [b] \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad [c] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad [d] \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$[e] \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

6.2. Observe con atención las siguientes matrices y halle el valor de su determinante usando propiedades y realizando la menor cantidad de cálculos posibles:

$$[a] \begin{pmatrix} 2 & -10 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad [b] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad [c] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$[d] \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.3. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$[a] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad [b] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad [c] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$[d] \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}; \quad [e] \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{f}] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{g}] \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.4. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\det(A) = 0$ en cada uno de los siguientes casos:

$$[\mathbf{a}] A = \begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{b}] A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{c}] A = \begin{pmatrix} -1 & k-1 & 2 \\ -k+3 & k^2-k & 3k+2 \\ k^2-7 & k-1 & k+4 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{d}] A = \begin{pmatrix} k-6 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 4 & k-4 \end{pmatrix}.$$

6.5. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Calcular:

$$[\mathbf{a}] \det \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{b}] \det \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{c}] \det \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{d}] \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{e}] \det \begin{pmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}.$$

6.6. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es inversible en cada uno de los siguientes casos:

$$[\mathbf{a}] \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{b}] \begin{pmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{c}] \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{d}] \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
 \text{[e]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ k & k+3 & 1 \\ k+2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \\
 \text{[f]} \begin{pmatrix} k & k^2 & 3k^4 & 5k-8 & -2k^2 \\ -2k^3+k-2 & -7 & 5k-2 & -4 & 14 \\ 2k & -4k & 1 & 0 & 8k \\ 0 & 2 & 2k^5+k^3 & 3k-7 & -4 \\ k-3 & 5 & k^4 & (k-3)^2 & -10 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

6.7. Sea $A \in R^{7 \times 7}$ tal que $\det(A) = 2$. Calcular:

[a] $\det(A^3)$.

[b] $\det(A^{-3})$.

[c] $\det(-3 \cdot A^3)$.

[d] $\det((-3 \cdot A)^3)$.

[e] $\det(-3 \cdot A^{-3})$.

[f] $\det((-3 \cdot A)^{-3})$.

[g] $\det(B \cdot A \cdot B^{-1})$, siendo $B \in R^{7 \times 7}$ inversible.

6.8. Sea $A \in R^{3 \times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3}$. Calcular:

[a] $\det(A + A \cdot B)$.

[b] $\det(A^{-1} + A^{-1} \cdot B)$.

[c] $\det(-2A + A \cdot 5B)$.

[d] $\det(-2A^{-1} + A^{-1} \cdot 5B)$.

6.9. Sean $A, B \in R^{5 \times 5}$ que verifican: $\det(A) = 16$, B es inversible y $A \cdot B = \det(B) \cdot I$.
Hallar $\det(B)$.

6.10. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4-a & 3 & a^2-4 \end{pmatrix} \in R^{4 \times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3 \times 4}$.

Determinar todos los $a \in R$ para los cuales $B \cdot A \in R^{3 \times 3}$ es inversible.

6.11. Considere el sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{cases} -x + ay + z = a \\ -x + (1-a)z = 1 \\ -x + y + z = a^2 \end{cases} .$$

[a] Usando determinantes, clasificar el sistema en función de a .

[b] Sea A la matriz asociada al sistema. Para $a = 200$, probar que A es inversible y calcular $\det(A^{-1})$.

6.12. Sean $M = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 1 & 0 \\ \alpha + 1 & \alpha & 2 \\ 2\alpha + 2 & \alpha + 1 & 3 \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{3 \times 1}$ y sea $B \in R^{3 \times 3}$ inversible

tal que $B \cdot b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Sea $C = B^{-1} \cdot M$.

[a] Clasificar el sistema $C \cdot x = b$ en función del parámetro α .

[b] Resolver $C \cdot x = b$ para cada valor α tal que el sistema haya resultado compatible indeterminado.

6.13. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3}$ y $B \in R^{3 \times 3}$ tal que $\det(B) = 5$.

Hallar todos los $X \in R^{3 \times 1}$ tales que $(B \cdot A) \cdot X = 2B \cdot X$.

6.14. Rehacer, usando determinantes, los ítems [a], [b], [c], [d], [e], [f] y [h] del ejercicio 2.13 de la Práctica 2. ¿Porqué no pedimos que rehaga los ítems [g] e [i]?