Elementos de Cálculo Numérico (Cs. Biológicas)

Práctica N°3: Matrices.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; calcular:

   (a) $3A - 2B + C$.
   (b) $A + 3(B - C)$.
   (c) $A - (B - 2C)$.
   (d) $A - B + 2C$.

2. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $C \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, $D \in \mathbb{R}^{7\times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

   (a) $A \cdot C$.
   (b) $C \cdot A$.
   (c) $A \cdot A$.
   (d) $B \cdot C$.
   (e) $C \cdot D$.
   (f) $D \cdot C$.
   (g) $A \cdot C \cdot D$.
   (h) $C \cdot D \cdot A$.

3. Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad "$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$" no es válida para matrices.

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) A^2.
   (b) B^3.
   (c) $-2A^2 + b^3A$.
   (d) todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifican que $3X - 2A = 5B$.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:

   (a) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   (b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

   (a) A^t, B^t y C^t.
   (b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.
   (c) $(A \cdot B)^t \cdot C$, $\left(C^t \cdot (A \cdot B)\right)^t$, $B^t \cdot A^t \cdot C$ y $B^t \cdot (C^t \cdot A)^t$.

8. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) $A^2 + A^3, \quad A^{15}$ y A^{1000}.

   (b) A^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Repetir los cálculos anteriores para la matriz B.

9. Dada una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz B. ¿Qué cambios producen los productos en la matiz B?

   (a) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot B$. $\qquad$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B$.

   (b) $B \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$. $\qquad$ (d) $B \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Dada una matriz $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar qué cambios se producen en la matiz C.

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C$, $\qquad$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C$, $\qquad$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \cdot C$.

11. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \neq 0$ y $A \neq I$ (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) tales que:

    (a) $A^2 = I$. $\qquad$ (c) $A^2 = A$.

    (b) $A^2 = 0$ $\qquad$ (d) $A \cdot B = B \cdot A$para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

12. Verificarlas matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular:

    (a) A^{-1}, B^{-1} y C^{-1}.

    (b) $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

    (c) $(AB)^{-1} \cdot C; \quad \left(C^{-1} \cdot (A \cdot B)\right)^{-1}; \quad B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$ y $B^{-1} \cdot (C^{-1} \cdot A)^{-1}$.

13. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

    (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\qquad$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. $\qquad$ (g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

    (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\qquad$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\qquad$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

    (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. $\qquad$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\qquad$ (i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

14. Considerar el sistema lineal $S : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$. Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

15. En cada uno de los siguientes casos, reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal $A \cdot \bar{x} = b$ y describir el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x^t = b\}$.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$(b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

16. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = . \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$.

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

17. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5a & 2(b-3) \\ 2 & a+4 \end{pmatrix}$. Hallar

    (a) **una** matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A \cdot X = X \cdot A$.

    (b) **todos** los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$.

18. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2}C$ para

    $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

19. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifican $A \cdot X = 2X + B^t$ para

    $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.