

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

**Práctica N°4: Geometría.**

- En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta  $L$ :
  - $L : t(-2, 3) + (2, 2)$ ;  $P_1 = (2, 2)$ ,  $P_2 = (-2, 3)$ ,  $P_3 = (0, 0)$ ,  $P_4 = (12, -13)$ ,  $P_5 = (2, -1)$ .
  - $L : t(-1, 1) + (3, -3)$ ;  $P_1 = (3, -3)$ ,  $P_2 = (0, 0)$ ,  $P_3 = (-1, 1)$ ,  $P_4 = (3, 4)$ ,  $P_5 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .
- Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación implícita y la ecuación explícita de la recta que:
  - pasa por  $P = (-1, 2)$  con vector director  $v = (3, 1)$ .
  - pasa por  $P = (1, -4)$  y  $Q = (-1, -3)$ .
  - que es paralela a la recta  $L : t(-2, 3) + (1, -1)$  y pasa por  $P = (1, -4)$ .
  - que pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por los puntos  $(4, -5)$  y  $(\frac{1}{2}, 3)$ .
  - es perpendicular a la recta  $L : t(2, 3) + (5, 7)$  y pasa por  $P = (-3, 1)$ .
- Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta de ecuación:
  - $y = 3x - 2$ .
  - $2x - 3y = 5$ .
  - $y = 4$ .
  - $x = -5$ .
  - $x = 4y - \frac{1}{2}$ .
- En cada uno de los siguientes casos, dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta que:
  - está dirigida por  $v = (0, 1, 0)$  y pasa por  $P = (0, 2, 4)$ .
  - pasa por los puntos  $P = (-2, 3, 4)$  y  $Q = (-1, 3, 1)$ .
  - es paralela al eje  $z$  y pasa por  $P = (1, 2, 3)$ .
  - que es paralela a la recta  $L : t(2, 4, -5) + (0, 3, -1)$  y pasa por  $P = (3, -1, 2)$ .
  - es perpendicular a la recta  $L : t(1, -2, 1) + (3, 5, 7)$  y pasa por  $P = (1, 9, -3)$ . ¿Es única?
- Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por los vectores  $v$  y  $w$  que pasa por el punto  $P$  en los siguientes casos:
  - $v = (0, 1, 0)$ ,  $w = (1, 0, 0)$  y  $P = (0, 0, 1)$ .
  - $v = (0, 2, 0)$ ,  $w = (1, 1, 0)$  y  $P = (0, 1, 1)$ .

Graficar los planos hallados en (a) y (b) y compararlos.
- Dar las ecuaciones paramétricas de:
  - un plano que contenga al eje  $z$  y a la recta dirigida por  $v = (1, 2, 1)$  que pasa por el origen.
  - la recta que está en la intersección del plano  $xz$  con el plano  $yz$ .
- Dar la ecuación vectorial:
  - de la recta que pasa por los puntos  $(2, 1, 3)$  y  $(3, -2, 5)$ .

- (b) del plano que pasa por los puntos  $(2, 1, 2)$ ,  $(1, 1, 1)$  y  $(3, 2, 7)$ .
- (c) del plano que pasa por el punto  $(1, 2, 1)$  y es paralelo al plano que contiene a los ejes  $x$  e  $y$ .
- (d) del plano que es paralelo a la recta  $L : t(1, 2, -4) + (1, 2, 1)$  y contiene los puntos  $P = (2, 2, 1)$  y  $Q = (1, 2, -3)$ .
8. (a) Decidir si los puntos  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (-2, 0, 1)$  y  $C = (3, 0, 2)$  son colineales (están sobre una misma recta) o no.
- (b) Decidir si los puntos  $A = (8, 2, 4)$ ,  $B = (4, 2, 8)$ ,  $C = (-2, 0, 1)$  y  $D = (1, -1, 3)$  son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.
9. Dado el plano  $\pi : 2x - 5y + 3z = 11$ ;
- (a) Hallar **todos** los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales  $(2, a, 7) \in \pi$ .
- (b) Decidir si existe algún valor de  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $(0, 3a, a) \in \pi$ .
10. Sea  $\pi$  el plano que contiene a la recta  $L : t(1, -2, 1) + (1, 0, 2)$  y contiene al punto  $P = (2, 2, 3)$ .
- (a) Decidir si los puntos  $P = (1, -2, 1)$  y  $Q = (3, 3, 4)$  pertenecen o no a  $\pi$ .
- (b) Hallar **todos** los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales  $(a, 2a + 1, a - 3) \in \pi$ .
11. Determinar, en cada uno de los siguientes casos, si las rectas  $L$  y  $L'$  resultan paralelas, coincidentes, concurrentes o alabeadas:
- (a)  $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$ ;  $L' : t(-1, 1, 2) + (1, 0, -1)$ .
- (b)  $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$ ;  $L' : t(2, 2, -2) + (1, 0, -1)$ .
- (c)  $L : t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2)$ ;  $L' : t(-2, -1, 2) + (-3, 2, 0)$ .
- (d)  $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$ ;  $L' : t(1, -2, 6) + (3, 3, -3)$ .
- (e)  $L : t(1, 2, -1) + (-1, -1, 2)$ ;  $L' : t(-1, 1, 1) + (3, 2, -1)$ .
12. (a) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto  $(-1, 2, 2)$  y es ortogonal a la recta  $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$ .
- (b) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto  $(-1, 2, 2)$  y es ortogonal a la recta de ecuaciones  $2x - 3y - z = 1$  y  $x - y + z = 2$ .
- (c) Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por  $P = (2, 1, 7)$  con vectores directores  $v = (1, 0, 4)$  y  $w = (4, -1, 3)$ .
- (d) Dar las ecuaciones paramétricas del plano  $\pi : 2x - y + 3z = 1$ .
13. Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano  $\pi$  y pasa por  $P$ :
- (a)  $P = (1, -1, 2)$ ;  $\pi$  pasa por los puntos  $(0, 2, 0)$ ,  $(-1, 1, 2)$  y  $(0, 5, 5)$ .
- (b)  $P = (3, 3, 3)$ ;  $\pi$  está dirigido por  $v = (1, 2, 1)$  y  $w = (-2, 2, -3)$  y pasa por  $Q = (0, 5, 4)$ .
- (c)  $P = (2, 1, 0)$ ;  $\pi : 3x - y + 2z = 4$ .
- (d)  $P$  es la intersección de las rectas  $L : t(1, 1, 1) + (1, 0, 1)$  y  $L' : t(1, -1, 2) + (0, 3, -2)$ ;  $\pi : y = 3$ .
14. Determinar en qué casos los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  se intersecan y hallar la intersección.
- (a)  $\pi_1 : 3x - 2y + 4z = 1$ ;  $\pi_2$  está dirigido por  $v = (2, 2, 0)$  y  $w = (-3, 2, 1)$  y pasa por  $(2, 2, 2)$ .
- (b)  $\pi_1 : 3x - 2y - 1 = 0$ ;  $\pi_2$  pasa por los puntos  $(3, 1, 4)$ ,  $(0, 0, -2)$  y  $(1, -1, -1)$ .
- (c)  $\pi_1 : 4x + 2 - 3z = 1$ ;  $\pi_2 : 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$ .

- (d)  $\pi_1$  pasa por  $(-1, 1, 2)$  con vector normal  $N = (1, 2, -1)$ ;  $\pi_2$  pasa por  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 3, 1)$  y  $(-1, -2, 2)$ .
15. Sea  $L$  la recta que pasa por los puntos  $P = (0, k + 3, 2k)$  y  $Q = (k^2, -k - 2, -1)$  y sea  $\pi$  el plano de normal  $N = (1, 1, -1)$  que pasa por  $A = (5, 7, 7)$ . Determinar **todos** los valores de  $k \in \mathbb{R}$  tales que  $L \cap \pi = \emptyset$ .
16. (a) Encontrar **todos** los puntos de la recta  $L : t(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$  que están a distancia 6 del punto  $P = (2, 1, -1)$ .  
 (b) Hallar el punto  $Q$  de la recta  $L : t(2, -1, 4)$  más próximo al punto  $P = (-4, 8, 1)$ .
17. Hallar las siguientes distancias:  
 (a) entre la recta  $L : t(1, 1) + (3, 0)$  y  $P = (-1, 1)$ .  
 (b) entre la recta  $L : t(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$  y  $P = (-1, 1, 0)$ .  
 (c) entre el plano  $\pi$  que tiene vector normal  $N = (1, -1, 2)$  y pasa por  $(1, 2, 1)$  y el punto  $P = (1, 2, 5)$ .
18. Un punto se desplaza por el espacio, de modo que en el instante  $t$  su posición viene dada por el vector  $x(t) = (1 - t)e_1 + (2 - 3t)e_2 + (2t - 1)e_3$ .  
 (a) Mostrar que el punto se mueve a lo largo de una recta.  
 (b) Hallar el instante  $t$  en que el punto toca al plano  $\pi : -2x + 3y + 2z = 0$ .  
 (c) Calcular, para cada valor de  $t$ , la distancia del punto al plano  $\pi$ .  
 (d) Hallar el instante  $t$  en que el punto está más cerca del origen. Dar el punto correspondiente y la distancia.
19. Sea  $L_1$  la recta que tiene dirección  $(1, 2, -1)$  y pasa por  $(-1, 3, 1)$ . Sea  $L_2$  la recta que pasa por  $(-1, 1, 3)$  y por  $(1, 2, 7)$ .  
 (a) Determinar si  $L_1$  y  $L_2$  se intersecan o no.  
 (b) Si  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ , hallar un plano que contenga a ambas rectas y dar el ángulo entre ellas.  
 (c) Si  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ , determinar una recta  $L_3$  paralela a  $L_1$  que interseque a  $L_2$  en el punto  $(-1, 1 - 3)$  y hallar el ángulo entre  $L_3$  y  $L_2$ .
20. Sean  $L_1$  y  $L_2$  las rectas de  $\mathbb{R}^2$ ,  $L_1 : x - y = 1$ ,  $L_2 : x + y = 3$ .  
 (a) Calcular el ángulo entre  $L_1$  y  $L_2$ .  
 (b) Hallar una recta  $L_3$  tal que  $\angle(L_1, L_2) = \angle(L_1, L_3)$  y  $L_1 \cap L_2 \in L_3$ .
21. Hallar las ecuaciones implícitas de la recta:  
 (a)  $L$  es intersección del plano  $xy$  con el plano  $yz$ .  
 (b)  $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$ .  
 (c)  $L$  pasa por los puntos  $(-5, 3, 7)$ ,  $(2, -3, 3)$ .
22. Se consideran las rectas  $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 9 \end{cases}$  y  $L_2 : t(1, 0, 2) + (1, 2, -3)$ .  
 (a) Probar que  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas y que  $P = (2, 2, -1)$  pertenece a  $L_2$ .  
 (b) Hallar un plano  $\pi$  perpendicular a  $L_2$  que pase por  $P$ .  
 (c) Hallar  $Q = L_1 \cap \pi$  y  $d(P, Q)$ .  
 (d) ¿Qué significa en este problema el número  $d(P, Q)$ ?

23. Sean  $A = (0, 2, 2)$ ,  $B = (2, 0, -1)$  y  $C = (0, -2, -1)$ .
- (a) Hallar la recta  $L$  que pasa por  $A$  y  $B$ .
  - (b) Hallar el plano  $\pi$  perpendicular a  $L$  que pasa por  $C$ .
  - (c) Hallar  $D = L \cap \pi$  y los valores  $d(A, B)$  y  $d(C, D)$ .
  - (d) Usando los cálculos hechos dar el área del triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
24. Sean  $\pi$  el plano de ecuación  $x + y + z = 1$  y  $L$  la recta  $t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$ .
- (a) Probar que  $L$  es paralela a  $\pi$  y que  $P = (2, 1, 1)$  pertenece a  $L$ .
  - (b) Hallar una recta  $L'$  ortogonal a  $\pi$  que pase por  $P$ .
  - (c) Hallar  $Q = L' \cap \pi$  y  $d(P, Q)$ .
  - (d) ¿Qué significa en este problema el número  $d(P, Q)$ ?