Elementos de Cálculo Numérico (Cs. Biológicas)

Práctica N°5: Subespacios - Rango de una Matriz.

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:
   (a) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.
   (b) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 = 0\}$.
   (c) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 < -1\}$.
   (d) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 0, \ x_3 - x_2 = 0\}$.
   (e) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 - 4x_2^2 = 0\}$.
   (f) $S \subset \mathbb{R}^5$; $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, \ \ 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, \ \ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera el conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ dado por $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2 = a\}$. Graficar S y mostrar que S es un subespacio si y sólo si $a = 0$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Probar que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : \ A \cdot v^t = 0\}$, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

4. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y analizar si son subespacios o no:
   (*a*) $S = \{t(1, 2) : \ t \in \mathbb{R}\}$.
   (*b*) $S = \{t(1, 2) + (2, 2) : \ t \in \mathbb{R}\}$.
   (*c*) $S = \{t(1, -2) + (-2, 4) : \ t \in \mathbb{R}\}$.
   (*d*) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : \ s, t \in \mathbb{R}\}$.
   (*e*) $S = \{s(1, 2) + t(2, 4) : \ s, t \in \mathbb{R}\}$.
   (*f*) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : \ s, t \in \mathbb{R} \text{ con } s + t = 1\}$.

5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sean v_0, v_1 y $v_2 \in \mathbb{V}$.
   (a) Probar que $S = \{t \cdot v_0 : \ t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
   (b) Probar que $T = \{s \cdot v_1 + t \cdot v_2 : \ s, t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
   (c) Describir geométricamente los subespacios S y T.

6. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^2$ $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$. Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de v_1 y v_2. ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

7. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:
   (a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$; $v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.
   (b) $S = \langle (1, 2, 3), \ (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$; $v = (-5, -10, -15)$.
   (c) $S = \langle (1, -1, 2, 1), \ (2, 1, 3, 0) \rangle$; $v = (0, -3, 1, 1)$.

8. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ con las condiciones:
   (a) que contenga al vector $v = (1, 2, 3)$.
   (b) que contenga al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contenga al vector $w = (0, 1, 1)$.

9. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^n$ o no:
   (*a*) $n = 2, \ \{(1, 1), \ (1, -1)\}$.
   (*b*) $n = 2, \ \{(-1, 1), \ (2, -2)\}$.
   (*c*) $n = 2, \ \{(1, 1), \ (1, -1), (3, 4)\}$.
   (*d*) $n = 3, \ \{(1, 1, -1), \ (0, 1, 1), \ (1, 2, 1)\}$.
   (*e*) $n = 3, \ \{(1, 1, -1), \ (0, 1, 1), \ (1, 2, 0)\}$.
   (*f*) $n = 3, \ \{(1, 1, -1), \ (0, 1, 1), \ (1, 2, 1), \ (3, 2, 1)\}$.
   (*g*) $n = 5, \ \{(1, 1, 1, 1, 1), \ (2, 3, 1, 1, 1), \ (1, 1, 1, 2, 1)\}$.

10. Hallar un sistema de generadores para cada uno de los siguientes subespacios

   (a) $S \subset \mathbb{R}^3$; $\quad S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 0, \ x_3 - x_2 = 0\}$.
   (b) $S \subset \mathbb{R}^5$; $\quad S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, \ \ 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, \ \ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.
   (c) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : \ s, t \in \mathbb{R}\}$.
   (d) $S = \langle (1, 1, -1), \ (0, 1, 1), \ (1, 2, 0)\rangle$.

11. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{V}$, un espacio vectorial real.

   (a) $\{(1, -3, 5), \ (-2, 2, 1), \ (-1, -1, 6)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (b) $(1, 2, 3, 4, 5)$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.
   (c) $\{(1, 2, 2, -1), \ (0, 2, -2, -3), \ (1, 1, 0, 2), \ (0, 1, -1, 0)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
   (d) $\{(1, 1, -1), \ (0, 1, 1), \ (1, 2, 0)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (e) $\{(1, 1, -1), \ (0, 1, 1), \ (1, 2, 1), \ (3, 2, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (f) $\{v\}$ con $v \in \mathbb{V}$; $\quad \{v_1, v_2\}$ con $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.
   (g) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, 0\}$ con $v_1, v_2, \ldots v_n, 0 \in \mathbb{V}$.

12. Hallar (si es posible) tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

13. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en $\mathbb{V}$:

   (a) $\{(0, -1, k), \ (1, -1, 2), \ (-1, 0, 2)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(1, -1, 2), \ (k + 1, k, k + 6), \ (k, k + 1, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (c) $\{(k - 2, k, 1, 0), \ (0, k, 0, 0), \ (1, 1, 0, k - 1), \ (2, -1, -1, k - 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.

14. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores son o no base del espacio $\mathbb{V}$. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender a una base de $\mathbb{V}$.

   (a) $\{(1, 0, 1), \ (1, 0, -1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(1, 1, 2), \ (0, 1, 1), \ (0, 0, 0)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (c) $\{(1, 1, 2), \ (0, 1, 1), \ (2, 3, 3)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (d) $\{(1, 0, 1), \ (1, 0, -1), \ (0, 0, 1), \ (1, 1, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   (e) $\{(1, 1, 1, 1, 1), \ (2, 3, 1, 1, 1), \ (1, 1, 1, 2, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.

15. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los subespacios del ejercicio 10.

16. Sea $S = \langle (0, -1, k), \ (1, -1, 0), \ (-1, 0, 2)\rangle$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio S en función de k.

17. Para los siguientes subespacios S y T hallar una base de S, T, $S \cap T$ y del subespacio generado por $S \cup T$. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?

   (a) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ x_1 - x_2 = 0\}$,
   $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 = 0, \ x_2 - x_4 = 0, \ x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$.
   (b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $\quad T = \langle (1, 1, 1), \ (0, -2, 0)\rangle$.
   (c) $S = \langle (1, 1, 2), \ (1, -1, 0)\rangle$, $\quad T = \langle (2, 0, -1), \ (-1, 0, \frac{1}{2})\rangle$.
   (d) $S = \langle (1, 2, 3, -1), \ (0, -1, 2, 0), \ (2, 0, 1, 2), \ (-1, -2, -1, 1)\rangle$,
   $T = \langle (1, 2, 1, 3), \ (0, -1, 0, 2), \ (2, 0, 2, 1), \ (-1, -1, -1, -2)\rangle$.

18. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \ -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (0,1,2,0), \ (1,2,0,\lambda) \rangle$:

   (a) hallar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $S \cap T \neq \emptyset$.

   (b) para cada valor λ hallado en (a), encontrar una base de $S \cap T$.

19. Para $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \ x_2 - x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$:

   (a) hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, a, -2, b) \in S \cap T$.

   (b) dar dos bases distintas de $S \cap T$.

   (c) Decidir si es posible dar tres vectores linealmente independientes en el subespacio $S \cap T$.

20. Dadas las matrices $A = (1,1,0,1)$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   (a) calcular la dimensión y una base del espacio fila; del espacio columna y del núcleo.

   (b) calcular el rango.

   (c) repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.

21. Para las matrices en $\mathbb{R}^{3\times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   hallar una base y la dimensión de los subespacios $N(A)$, $N(B)$, $N(A) \cap N(B)$ y $N(A) \cap N(A^t \cdot A)$.

22. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

   (a) Si $m = n = 10$ y $rg(A) = 6$; calcular $dim(N(A))$.

   (b) Si $m = 7$, $n = 8$ y $rg(A) = 2$; calcular $dim(N(A))$.

   (c) Si $m = 4$, $n = 5$ y $dim(N(A)) = 3$; calcular $rg(A)$.

   (d) Si $m = 3$, $n = 5$ y $dim(E_C(A^t)) = 3$; calcular $dim(N(A))$.

   (e) Si $m = 3$, $n = 4$ y $dim(E_C(A)) = 2$; calcular $dim(N(A))$.

   (f) Si $m = n = 4$ y $dim(E_C(A)) + dim(E_C(A^t)) = 6$; calcular $dim(N(A))$.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

   (a) Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.

   (b) Calcular los subespacios $dim(N(A))$, $dim(N(A^t))$, $dim(E_F(A)), rg(A)$ y $rg(A^t)$

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y S el sistema $S : \begin{cases} ax + y + bz &= 0 \\ 2ax - y + bz &= 0 \end{cases}$.

   Hallar a y b tales que el subespacio $N(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S.

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ una matriz tal que $dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

26. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ una matriz tal que $rg(A) = 2$.

    (a) Determinar si el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución no nula.

    (b) Calcular la dimensión del espacio de soluciones del sistema $A^t \cdot x = 0$.

27. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

    (a) Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $rg(A) = 2$.

    (b) Para el valor de b hallado, analizar si $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

28. Para cada uno de os siguientes subespacios S, hallar $m, n \in \mathbb{N}$; y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tales que $N(A) = S$.

    (a) $S = \langle(1, 3)\rangle$.

    (b) $S = \langle(1, 3, 1),\ (-2, 1, 0)\rangle$.

    (c) $S = \langle(1, 3, 1),\ (-2, 1, 0),\ (-1, 4, 1)\rangle$.

    (d) $S = \langle(1, 3, 1, -2),\ (-2, 1, 0, 3),\ (-1, 4, 1, 1),\ (3, 2, 1, -5)\rangle$.

29. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - x_4 = 0\}$:

    (a) Hallar la dimensión y una base $\mathcal{B}$ de $S \cap T$.

    (b) Dar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^4$ que no sean combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

    (c) Hallar $m, n \in \mathbb{N}$; y $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dos matrices distintas tales que $A \cdot v^t = B \cdot v^t = 0$ para todo $v \in S \cap T$.

30. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son dos matrices tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$.

    Calcular $rg(A \cdot B \cdot A)$, $dim(N(A \cdot B \cdot A))$ y hallar una base de $N(A \cdot B \cdot A)$.

31. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle(2, 3, -1),\ (-2, 1, 5),\ (4, 2, -6)\rangle$:

    (a) Probar que $T \subset S$.

    (b) Calcular $dim(S)$, $dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T = S$ o no.

32. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha + 2)x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ -x_1 + (\alpha^2 - 7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2 - 11)x_2 + (2\alpha + 7)x_3 + 2x_4 = 0\}$

    (a) Calcular $dim(S \cap T)$ es términos del parámetro α.

    (b) Para cada α tal que $dim(S \cap T) = 1$, hallar una base de $S \cap T$.

    (c) Para cada α tal que $dim(S \cap T) = 2$, hallar una base de $\langle S \cup T\rangle$.

33. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & (k+2) & (k+3) \\ -1 & (k^2-7) & -1 & (-2k-6) \\ 1 & (k^2-11) & (2k+7) & (k-9) \end{pmatrix}$.

    (a) Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $dim(N(A)) = dim(E_F(A^t))$.

    (b) Para cada k hallado, calcular una base de $N(A)$ y una base de $N(A^t)$.

34. Sean S y T subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $dim(S) = 3$ y $dim(T) = 4$.

   (a) Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
   (i) $S \subset T$. (ii) $dim\langle S \cup T\rangle = 7$. (iii) $dim(S \cap T) = 4$. (iv) $S \cap T = \emptyset$.

   (b) Si $dim(S \cap T) = 3$, ¿qué puede decirse de S y T?

   (c) Si $dim\langle S \cup T\rangle = 4$, ¿qué puede decirse de S y T?

   (d) Si $S \subset T$, calcular $dim\langle S \cup T\rangle$ y $dim(S \cap T)$.

35. Sean $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ y $Q \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tales que $rg(P) + dim(N(Q)) = 6$ y $dim(E_F(P^t)) = 5$.

   (a) Calcular $dim(N(P))$, $rg(P)$, $dim(N(Q))$ y $rg(Q)$.

   (b) Calcular $dim(E_C(Q^t \cdot P^{-1}))$.

   (c) Calcular $dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$, si $W \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ es una matriz tal que $dim(N(W)) = 3$.