Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Departamento de Matemática
Segundo Cuatrimestre de 2004

Elementos de Cálculo Numérico (Cs. Biológicas)

Práctica N°9: Matrices estocásticas - Procesos de Markov

1. Determinar cuáles de las siguientes matrices son estocásticas o de Markov.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{(b)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{(c)} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0.2 \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0.5 \\ -\frac{1}{2} & 0.5 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \text{(e)} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0.5 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

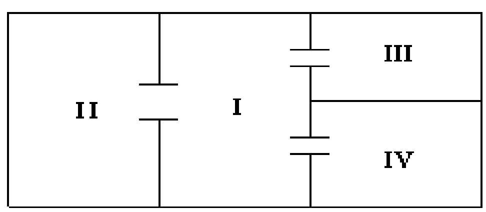
2. Un país, cuya población es constante está dividido en dos regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región A se traslada a la región B mientras que 1 de cada 5 habitantes de la zona B se muda a la región A. En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región A y 30 millones en la B.

   (a) Escribir la matriz de transición para este proceso.

   (b) Calcular el estado de la población dentro de 10 años.

   (c) Lo mismo pero dentro de 30 años.

3. En el instante inicial 21 ratones se encuentran en la casilla I (ver diagrama). Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de las casillas adyacentes o se quede en la casilla en la que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el nuevo estado.



   (a) Determinar la matriz de transición del proceso.

   (b) Determinar el vector de estado después de 4 horas.

   (c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio y justificar la respuesta.

4. En una población animal tenemos una epizootia que en este momento afecta al 30% de los animales. El resto está sano pero puede enfermarse. Los especímenes que se curan adquieren inmunidad. La progresión de la epizootia se atiene a la siguientes reglas:

   - Cada semana un 15% de los sanos no inmunes se enferman;
   - En el mismo lapso, un 10% de los animales enfermos se cura.

   (a) Dar la matriz de transición del proceso y determinar el estado inicial.

   (b) Dar el estado del proceso después de 5 semanas de iniciado.

   (c) Determinar si existe un estado de equilibrio.

5. Un proceso de Markov admite 3 estadios o sectores: α, β y γ. La probabilidad de pasar del estadio α a cada uno de los otros sectores es $\frac{1}{2}$. Un individuo que está en el estadio β tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ de pasar al α y lo mismo sucede para transitar del β al γ. Los individuos en el estadio γ tienen probabilidad 1 de pasar al α en el período siguiente.

   (a) Armar la matriz estocástica A de transición de este proceso.

   (b) Si el estado actual del proceso está dado por $V^t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, determinar el estado siguiente.

   (c) Analizar el comportamiento de A^n para valores de n grandes.

   (d) Decidir si existe un estado límite.

6. Se observa la alimentación de una determinada especie de insectos en un ecosistema. En la actualidad la mitad de los insectos come una gramínea baja, el 30% una variedad de gramínea alta y el restante 20% se alimenta de las hojas de cierto tipo de árbol. Sin embargo, las preferencias alimentarias cambian año a año. Se ha determinado que un 25% de los insectos que comen gramínea baja cambiarán el próximo año a hojas de árbol y un 20% a gramínea alta. Entre los que se alimentan de gramínea alta un 50% pasará a gramínea baja. Un 40% de los que se alimentan con hojas de árboles pasarán a comer gramínea baja y el resto seguirá con las hojas de árboles.

   (a) Formar la matriz de transición de este proceso.

   (b) Dar el vector de estado a los 3 años

   (c) ¿Existe un estado de equilibrio?

7. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. Esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75% de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.

   (a) Determinar la matriz y el estado inicial que rigen el proceso.

   (b) Calcular los 5 primeros estados del proceso de Markov.

   (c) Verificar que el vector $V^t = (\frac{2}{17}, \frac{15}{17})$ es estado de equilibrio.

8. Sea $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ la matriz de transición de un proceso de Markov y sea $V(2)^t = (\frac{1}{18}, \frac{11}{18})$ el segundo estado. Calcular $V(0)$ y $V(1)$.

9. Se tiene un proceso de Markov cuya matriz de transición es $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$. Verificar que el vector $V^t = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ es un estado de equilibrio del proceso.

10. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$M = \begin{pmatrix} a & a + \frac{1}{10} & b + \frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b + \frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

   (a) Determinar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales M resulta ser una matriz de Markov.

   (b) Para los valores de a y b hallados, decidir si hay dos vectores de equilibrio de M que sean linealmente independientes. En caso afirmativo, hallarlos. Si no, justificar adecuadamente.

   (c) Para los valores a y b hallados, verificar que M^t es también una matriz de Markov. ¿Es casualidad o una ley general?

11. Se tiene una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que define un proceso de Markov de la que se sabe que:

   • $a_{13} = a_{31} = 0$ y $a_{22} = \frac{2}{7}$, • $\mathrm{tr}(A) = \frac{25}{10}$ y • $(0,2,3)$ es un estado de equilibrio del proceso.

   (a) Determinar todos los valores de la matriz A.
   (b) Decidir si hay dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes.
   (c) Si $V(0) = (1,3,2)^t$ es el vector inicial, decidir si el proceso tiene estado límite. En caso afirmativo, encontrarlo.
   (d) Determinar si existe A_∞ y en tal caso, hallarla.

12. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz que define un proceso de Markov de la que se sabe que:

   • $m_{12} = m_{13} = 0$ y $m_{22} + m_{23} = \frac{9}{10}$, • $\mathrm{tr}(M) = \frac{5}{2}$ y • $\det(M) = \frac{1}{2}$.

   (a) Hallar todos los autovalores de M.
   (b) Sabiendo que el vector $(1,2,3)$ resulta estado límite del proceso para cierto vector de estado inicial, hallar la matriz M.
   (c) Decidir si hay dos vectores linealmente independientes que sean estados de equilibrio de M.
   (d) Determinar si existe M_∞. Justificar.

13. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en tres sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100% de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100% de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 1, mientras que la población del Sector 3 permanece (sin desplazarse) en su sector. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

   (a) Determinar la matriz de transición A que describe el proceso.
   (b) Decidir si hay dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes.
   (c) Determinar si el proceso tienen un estado límite con una población inicial de 200 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3. En caso afirmativo, hallarlo. En caso negativo, justificar.
   (d) Idem ítem anterior para una población inicial de 100 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.
   (e) Determinar si existe A_∞. Justificar.

14. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en cuatro sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100% de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100% de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 3, el 100% de la población del Sector 3 se ha desplaza al Sector 4 y el 100% de la población del Sector 4 se ha desplaza al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

   (a) Determinar la matriz de transición A que describe el proceso.
   (b) Decidir si hay dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes.
   (c) Determinar si el proceso tienen un estado límite con una población inicial de 100 habitantes en cada Sector. En caso afirmativo, hallarlo.
   (d) Idem ítem anterior para una población inicial de 100 habitantes en el Sector 1, 300 en el Sector 2, 100 en el Sector 3 y 300 en el Sector 4.
   (e) Decidir si existe A_∞ (Sugerencia: calcular A^4).