

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°1: Operaciones Vectoriales.

1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{v} + \vec{w}$.	(d) $3\vec{u} + 3\vec{v}$; $3(\vec{u} + \vec{v})$.
(b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.	(e) $\vec{u} - \vec{v}$.
(c) $3\vec{u}$; $3\vec{v}$.	
2. Sea $\vec{w} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:

(a) $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}\}$.	
(b) $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.	
(c) $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}, 1 \leq t \leq 2\}$.	
3. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$.	(d) $2\vec{u}$.
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.	(e) $-3\vec{w}$.
(c) $\vec{u} - \vec{v}$.	(f) $-\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.
4. En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α , 148 de cepa β y 290 de cepa γ . Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α , 48 de cepa β y 110 de cepa γ . A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector PI de población inicial, el vector N_7 de natalidad durante julio, el vector M_7 de mortalidad durante el mismo mes y el vector PF de población final al terminar el mes.
5. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre P y Q siendo $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 2)$.
6. Dados los puntos $A = (1, 7, 3)$, $B = (-1, 3, 0)$ y $C = (3, -4, 11)$ determinar:

(a) los vectores $\overrightarrow{AB} = B - A$ y $\overrightarrow{BC} = C - B$.	
(b) el punto medio entre los puntos A y B .	
7. Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{z} = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

(a) $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\vec{w} \cdot \vec{w}$.	
(b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$; $(\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$.	
(c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\vec{w} \cdot \vec{v}$; $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{w}$; $(\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \vec{w})$.	
(d) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $3(\vec{v} \cdot \vec{w})$; $\vec{v} \cdot (2\vec{w} - 3\vec{v})$.	
8. En el mismo bioterio del problema 4 los precios de los animales son \$1,50 por cada rata de cepa α , \$2,50 cada rata de cepa β y \$4 cada animal de cepa γ . Un comprador necesita 18 animales de cepa α , 24 de cepa β y 20 de cepa γ . Determinar el vector P de precios unitarios del bioterio, el vector C de compra del cliente y el valor total de la compra.

9. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda:
- $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$, $\vec{w} = (-1, -2)$, $\vec{x} = (3, 0)$, $\vec{y} = (-3, 4)$, $\vec{z} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
 - $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 1, 1)$.
 - $(1, 1, -1)$, $(1, 1, -2) + (3, 5, 6)$, $(2, -1, 3)$, $-2 \cdot (2, -1, 3)$ y $2 \cdot (2, -1, 3)$.
10. Normalizar cada uno de los vectores del problema anterior.
11. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
- $A = (1, -3)$; $B = (0, 0)$.
 - $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$.
 - $A = (2, -3)$; $B = (5, 3)$.
 - $C = (1, 2, 3)$; $D = (4, 1, -2)$.
 - $C = (4, -2, 6)$; $D = (3, -4, 4)$.
 - $C = (1, 2, -3)$; $D = (0, 3, 1)$.
12. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:
- $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.
 - $\vec{v} = (1, k, 0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.
 - $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.
 - $A = (1, 1, 1)$, $B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.
13. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:
- $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| = 1\}$.
 - $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| = 1\}$.
 - $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| \leq 1\}$.
 - $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| \leq 1\}$.
14. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:
- $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$.
 - $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$.
 - $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.
15. Hallar:
- Tres vectores en el plano distintos entre sí que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
 - Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
 - Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ distintos entre sí que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
 - Un vector del espacio ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
 - Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).
16. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:
- $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.
17. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:
- el ángulo entre ambos vectores.
 - el módulo de $\vec{u} - \vec{v}$.
 - un vector que sea simultáneamente ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
18. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.
19. Calcular el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ para los siguientes vectores:
- $\vec{v} = (3, 5, 1)$; $\vec{w} = (3, 5, 1)$.
 - $\vec{v} = (3, 5, 1)$; $\vec{w} = (7, 4, 3)$.
 - $\vec{v} = (7, 4, 3)$; $\vec{w} = (3, 5, 1)$.
 - $\vec{v} = (2, 0, 0)$; $\vec{w} = (0, 0, 3)$.

20. Sean $\vec{u} = (2, 1, -3)$ y $\vec{v} = (1, -2, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.
- (a) Calcular $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.
 - (b) Verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.
21. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:
- (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?
 - (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.
 - (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?