

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°4: Geometría Lineal.

- En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L :
 - $L : t(-2, 3) + (2, 2)$; $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (-2, 3)$, $P_3 = (0, 0)$, $P_4 = (12, -13)$, $P_5 = (2, -1)$.
 - $L : t(-1, 1) + (3, -3)$; $P_1 = (3, -3)$, $P_2 = (0, 0)$, $P_3 = (-1, 1)$, $P_4 = (3, 4)$, $P_5 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
- Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación implícita y la ecuación explícita de la recta que:
 - pasa por $P = (-1, 2)$ con vector director $v = (3, 1)$.
 - pasa por $P = (1, -4)$ y $Q = (-1, -3)$.
 - que es paralela a la recta $L : t(-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por $P = (1, -4)$.
 - que pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, -5)$ y $(\frac{1}{2}, 3)$.
 - es perpendicular a la recta $L : t(2, 3) + (5, 7)$ y pasa por $P = (-3, 1)$.
- Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta de ecuación:
 - $y = 3x - 2$.
 - $2x - 3y = 5$.
 - $y = 4$.
 - $x = -5$.
 - $x = 4y - \frac{1}{2}$.
- En cada uno de los siguientes casos, dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta que:
 - está dirigida por $v = (0, 1, 0)$ y pasa por $P = (0, 2, 4)$.
 - pasa por los puntos $P = (-2, 3, 4)$ y $Q = (-1, 3, 1)$.
 - es paralela al eje z y pasa por $P = (1, 2, 3)$.
 - que es paralela a la recta $L : t(2, 4, -5) + (0, 3, -1)$ y pasa por $P = (3, -1, 2)$.
 - es perpendicular a la recta $L : t(1, -2, 1) + (3, 5, 7)$ y pasa por $P = (1, 9, -3)$. ¿Es única?
- Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por los vectores v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:
 - $v = (0, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0)$ y $P = (0, 0, 1)$.
 - $v = (0, 2, 0)$, $w = (1, 1, 0)$ y $P = (0, 1, 1)$.Graficar los planos hallados en (a) y (b) y compararlos.
- Dar las ecuaciones paramétricas de:
 - un plano que contenga al eje z y a la recta dirigida por $v = (1, 2, 1)$ que pasa por el origen.
 - la recta que está en la intersección del plano xz con el plano yz .
- Dar la ecuación vectorial:
 - de la recta que pasa por los puntos $(2, 1, 3)$ y $(3, -2, 5)$.

- (b) del plano que pasa por los puntos $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$ y $(3, 2, 7)$.
- (c) del plano que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y .
- (d) del plano que es paralelo a la recta $L : t(1, 2, -4) + (1, 2, 1)$ y contiene los puntos $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (1, 2, -3)$.
8. (a) Decidir si los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 0, 1)$ y $C = (3, 0, 2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.
- (b) Decidir si los puntos $A = (8, 2, 4)$, $B = (4, 2, 8)$, $C = (-2, 0, 1)$ y $D = (1, -1, 3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.
9. Dado el plano $\pi : 2x - 5y + 3z = 11$;
- (a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2, a, 7) \in \pi$.
- (b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(0, 3a, a) \in \pi$.
10. Sea π el plano que contiene a la recta $L : t(1, -2, 1) + (1, 0, 2)$ y contiene al punto $P = (2, 2, 3)$.
- (a) Decidir si los puntos $P = (1, -2, 1)$ y $Q = (3, 3, 4)$ pertenecen o no a π .
- (b) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(a, 2a + 1, a - 3) \in \pi$.
11. Determinar, en cada uno de los siguientes casos, si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:
- (a) $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$; $L' : t(-1, 1, 2) + (1, 0, -1)$.
- (b) $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$; $L' : t(2, 2, -2) + (1, 0, -1)$.
- (c) $L : t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2)$; $L' : t(-2, -1, 2) + (3, 3, -2)$.
- (d) $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$; $L' : t(1, -2, 6) + (3, 3, -3)$.
- (e) $L : t(1, 2, -1) + (-1, -1, 2)$; $L' : t(-1, 1, 1) + (3, 2, -1)$.
12. (a) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$.
- (b) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta de ecuaciones $2x - 3y - z = 1$ y $x - y + z = 2$.
- (c) Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por $P = (2, 1, 7)$ con vectores directores $v = (1, 0, 4)$ y $w = (4, -1, 3)$.
- (d) Dar las ecuaciones paramétricas del plano $\pi : 2x - y + 3z = 1$.
13. Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por P :
- (a) $P = (1, -1, 2)$; π pasa por los puntos $(0, 2, 0)$, $(-1, 1, 2)$ y $(0, 5, 5)$.
- (b) $P = (3, 3, 3)$; π está dirigido por $v = (1, 2, 1)$ y $w = (-2, 2, -3)$ y pasa por $Q = (0, 5, 4)$.
- (c) $P = (2, 1, 0)$; $\pi : 3x - y + 2z = 4$.
- (d) P es la intersección de las rectas $L : t(1, 1, 1) + (1, 0, 1)$ y $L' : t(1, -1, 2) + (0, 3, -2)$; $\pi : y = 3$.
14. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.
- (a) $\pi_1 : 3x - 2y + 4z = 1$; π_2 está dirigido por $v = (2, 2, 0)$ y $w = (-3, 2, 1)$ y pasa por $(2, 2, 2)$.
- (b) $\pi_1 : 3x - 2y - 1 = 0$; π_2 pasa por los puntos $(3, 1, 4)$, $(0, 0, -2)$ y $(1, -1, -1)$.
- (c) $\pi_1 : 4x + 2 - 3z = 1$; $\pi_2 : 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.

- (d) π_1 pasa por $(-1, 1, 2)$ con vector normal $N = (1, 2, -1)$; π_2 pasa por $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.
15. Sea L la recta que pasa por los puntos $P = (0, k + 3, 2k)$ y $Q = (k^2, -k - 2, -1)$ y sea π el plano de normal $N = (1, 1, -1)$ que pasa por $A = (5, 7, 7)$. Determinar **todos** los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $L \cap \pi = \emptyset$.
16. (a) Encontrar **todos** los puntos de la recta $L : t(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2, 1, -1)$.
 (b) Hallar el punto Q de la recta $L : t(2, -1, 4)$ más próximo al punto $P = (-4, 8, 1)$.
17. Hallar las siguientes distancias:
 (a) entre la recta $L : t(1, 1) + (3, 0)$ y $P = (-1, 1)$.
 (b) entre la recta $L : t(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$ y $P = (-1, 1, 0)$.
 (c) entre el plano π que tiene vector normal $N = (1, -1, 2)$ y pasa por $(1, 2, 1)$ y el punto $P = (1, 2, 5)$.
18. Un punto se desplaza por el espacio, de modo que en el instante t su posición viene dada por el vector $x(t) = (1 - t)e_1 + (2 - 3t)e_2 + (2t - 1)e_3$; donde $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$.
 (a) Mostrar que el punto se mueve a lo largo de una recta.
 (b) Hallar el instante t en que el punto toca al plano $\pi : -2x + 3y + 2z = 0$.
 (c) Calcular, para cada valor de t , la distancia del punto al plano π .
 (d) Hallar el instante t en que el punto está más cerca del origen. Dar el punto correspondiente y la distancia.
19. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1, 2, -1)$ y pasa por $(-1, 3, 1)$. Sea L_2 la recta que pasa por $(-1, 1, 3)$ y por $(1, 2, 7)$.
 (a) Determinar si L_1 y L_2 se intersecan o no.
 (b) Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, hallar un plano que contenga a ambas rectas y dar el ángulo entre ellas.
 (c) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1, 1 - 3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2 .
20. Sean L_1 y L_2 las rectas de \mathbb{R}^2 , $L_1 : x - y = 1$, $L_2 : x + y = 3$.
 (a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2 .
 (b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_2) = \angle(L_1, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.
21. Hallar las ecuaciones implícitas de la recta:
 (a) L es intersección del plano xy con el plano yz .
 (b) $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$.
 (c) L pasa por los puntos $(-5, 3, 7)$, $(2, -3, 3)$.
22. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 9 \end{cases}$ y $L_2 : t(1, 0, 2) + (1, 2, -3)$.
 (a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas y que $P = (2, 2, -1)$ pertenece a L_2 .
 (b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por P .
 (c) Hallar $Q = L_1 \cap \pi$ y $d(P, Q)$.
 (d) ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?

23. Sean $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, -1)$ y $C = (0, -2, -1)$.
- (a) Hallar la recta L que pasa por A y B .
 - (b) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por C .
 - (c) Hallar $D = L \cap \pi$ y los valores $d(A, B)$ y $d(C, D)$.
 - (d) Usando los cálculos hechos dar el área del triángulo de vértices A , B y C .
24. Sean π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$.
- (a) Probar que L es paralela a π y que $P = (2, 1, 1)$ pertenece a L .
 - (b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por P .
 - (c) Hallar $Q = L' \cap \pi$ y $d(P, Q)$.
 - (d) ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?