Elementos de Cálculo Numérico (Cs. Biológicas)

Práctica N°1: Operaciones Vectoriales.

1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

   (a) $\vec{u} + \vec{v}$; $\quad \vec{v} + \vec{w}$.
   (b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; $\quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
   (c) $3\vec{u}$; $\quad 3\vec{v}$.
   (d) $3\vec{u} + 3\vec{v}$; $\quad 3(\vec{u} + \vec{v})$.
   (e) $\vec{u} - \vec{v}$.

2. Sea $\vec{w} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:

   (a) $L = \{t \cdot \vec{w} : \quad t \in \mathbb{R}\}$.
   (b) $L = \{t \cdot \vec{w} : \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.
   (c) $L = \{t \cdot \vec{w} : \quad t \in \mathbb{R},\ 1 \leq t \leq 2\}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

   (a) $\vec{u} + \vec{v}$.
   (b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
   (c) $\vec{u} - \vec{v}$.
   (d) $2\vec{u}$.
   (e) $-3\vec{w}$.
   (f) $-\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.

4. En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α, 148 de cepa β y 290 de cepa γ. Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α, 48 de cepa β y 110 de cepa γ. A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector PI de población inicial, el vector N_7 de natalidad durante julio, el vector M_7 de mortalidad durante el mismo mes y el vector PF de población final al terminar el mes.

5. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre P y Q siendo $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 2)$.

6. Dados los puntos $A = (1, 7, 3), B = (-1, 3, 0)$ y $C = (3, -4, 11)$ determinar:

   (a) los vectores $\overrightarrow{AB} = B - A$ y $\overrightarrow{BC} = C - B$.
   (b) el punto medio entre los puntos A y B.

7. Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{z} = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

   (a) $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\quad \vec{w} \cdot \vec{w}$.
   (b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$; $\quad (\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$.
   (c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\quad \vec{w} \cdot \vec{v}$; $\quad (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{w}$; $\quad (\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \vec{w})$.
   (d) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $\quad 3(\vec{v} \cdot \vec{w})$; $\quad \vec{v} \cdot (2\vec{w} - 3\vec{v})$.

8. En el mismo bioterio del problema 4 los precios de los animales son $\$1,50$ por cada rata de cepa α, $\$2,50$ cada rata de cepa β y $\$4$ cada animal de cepa γ. Un comprador necesita 18 animales de cepa α, 24 de cepa β y 20 de cepa γ. Determinar el vector P de precios unitarios del bioterio, el vector C de compra del cliente y el valor total de la compra.

9. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda:

   (a) $\vec{u} = (1, 2),\ \vec{v} = (-1, 3),\ \vec{w} = (-1, -2),\ \vec{x} = (3, 0),\ \vec{y} = (-3, 4),\ \vec{z} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

   (b) $\vec{u} = (0, 1, 2),\ \vec{v} = (1, 1, 0),\ \vec{w} = (-1, 1, 1)$.

   (c) $(1, 1, -1),\ (1, 1, -2) + (3, 5, 6),\ (2, -1, 3),\ -2 \cdot (2, -1, 3)$ y $2 \cdot (2, -1, 3)$.

10. Normalizar cada uno de los vectores del problema anterior.

11. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:

   (a) $A = (1, -3)$; $B = (0, 0)$.
   (b) $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$.
   (c) $A = (2, -3)$; $B = (5, 3)$.
   (d) $C = (1, 2, 3)$; $D = (4, 1, -2)$.
   (e) $C = (4, -2, 6)$; $D = (3, -4, 4)$.
   (f) $C = (1, 2, -3)$; $D = (0, 3, 1)$.

12. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:

   (a) $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.

   (b) $\vec{v} = (1, k, 0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.

   (c) $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.

   (d) $A = (1, 1, 1),\ B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.

13. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:

   (a) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A\| = 1\}$.
   (b) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A - C\| = 1\}$.
   (c) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A\| \leq 1\}$.
   (d) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A - C\| \leq 1\}$.

14. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:

   (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$.
   (b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$.
   (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
   (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.

15. Hallar:

   (a) Tres vectores en el plano distintos entre sí que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.

   (b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.

   (c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ distintos entre sí que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.

   (d) Un vector del espacio ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?

   (e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

16. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
   (b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
   (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
   (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

17. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:

   (a) el ángulo entre ambos vectores.

   (b) el módulo de $\vec{u} - \vec{v}$.

   (c) un vector que sea simultáneamente ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

18. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.

19. Calcular el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ para los siguientes vectores:

   (a) $\vec{v} = (3, 5, 1)$; $\vec{w} = (3, 5, 1)$.
   (b) $\vec{v} = (3, 5, 1)$; $\vec{w} = (7, 4, 3)$.
   (c) $\vec{v} = (7, 4, 3)$; $\vec{w} = (3, 5, 1)$.
   (d) $\vec{v} = (2, 0, 0)$; $\vec{w} = (0, 0, 3)$.

20. Sean $\vec{u} = (2, 1, -3)$ y $\vec{v} = (1, -2, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calcular $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

   (b) Verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

21. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

   (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?

   (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.

   (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?