Elementos de Cálculo Numérico (Cs. Biológicas)

Práctica N°2: Sistemas Lineales.

1. Decidir cuáles de los siguientes sistemas de relaciones matemáticas son sistemas de ecuaciones lineales (brevemente sistemas lineales):

$$(a)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y-3z & = & 7 \\ -2x+4y-z & = & 6 \\ \frac{1}{2}x-y+4z & \leq & 2 \end{array}\right. . \quad (c)\left\{\begin{array}{rcl} -9x-3y+z & = & 3 \\ 5x+\frac{1}{3}y+2z & = & 0 \\ 4yz & = & 0 \end{array}\right. . \quad (e)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y-3z & = & 7 \\ -2x+4y-z & = & 6 \\ \frac{1}{2}x^2-y+4z & = & 2 \end{array}\right. .$$

$$(b)\left\{\begin{array}{rcl} \frac{2}{3}x+4y-2z & = & -1 \\ 3y-2z & = & 0 \\ -8x+y-z & = & 1 \end{array}\right. . \quad (d)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 12 \\ -8x+2y+2z & = & 0 \\ -x+3y-4z & = & 2 \end{array}\right. . \quad (f)\left\{\begin{array}{rcl} -6x+9y-3z & = & 7 \\ 2z & = & 0 \\ -4z & = & 1 \end{array}\right. .$$

2. Se considera el sistema lineal $S:\left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2+x_3+x_4 & = & 2 \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 6 \\ 5x_1-3x_2-3x_3+x_4 & = & 0 \end{array}\right.$ y los vectores

   $\vec{v_1}=(0,0,0,0)$, $\vec{v_2}=(1,1,1,1)$, $\vec{v_3}=(-2,2,-3,7)$, $\vec{v_4}=(0,2,2,2)$. Decidir:

   (a) cuáles de las cuaternas dadas son soluciones de S.

   (b) cuáles de las cuaternas dadas son soluciones del sistema homogéneo asociado a S.

3. Hallar, si es que existen, todos los valores de $a,\ b\in\mathbb{R}$ para los cuales $(1,-2,3)$ es solución del sistema lineal dado en cada uno de los siguientes casos:

$$(a)\left\{\begin{array}{rcl} 2bx_1+x_2-x_3 & = & 1 \\ x_1-ax_2+x_3 & = & 0 \\ 4x_1-bx_2+ax_3 & = & 4 \end{array}\right. . \qquad (b)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2ax_2+x_3 & = & 0 \\ ax_2-bx_3 & = & 4 \\ x_1+bx_2+(2a+b)x_3 & = & b \end{array}\right. .$$

4. Se considera el sistema lineal $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & a \\ 2x+y & = & b \\ x+z & = & c \end{array}\right.$. Determinar los valores de $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que el vector $(2,-1,1)$ sea solución del sistema y hallar todas las soluciones del mismo.

5. Determinar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) cuáles de las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema lineal generan otro sistema equivalente al original.

   (a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de todas las ecuaciones.

   (b) Sustituir dos ecuaciones por su suma.

   (c) Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.

   (d) Sumar $2x+2$ al primer miembro de cada ecuación del sistema.

   (e) Intercambiar dos ecuaciones entre sí.

   (f) Sustituir una ecuación por el resultado de sumarla con otra.

   (g) Sustituir una ecuación por el resultado de restarle otra.

6. Explicar por medio de qué operaciones se puede asegurar que los siguientes pares de sistemas son equivalentes.

$$(a)\ \begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x-y &= 7 \end{cases};\ \begin{cases} 2x+2y &= 10 \\ 6x-3y &= 21 \end{cases}. \qquad (c)\ \begin{cases} -4x+2y &= -3 \\ 3x+2y &= 1 \end{cases};\ \begin{cases} 6x+4y &= 2 \\ 2x-y &= \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$(b)\ \begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x-y &= 7 \end{cases};\ \begin{cases} x+y &= 5 \\ 3x &= 12 \end{cases}. \qquad (d)\ \begin{cases} x+y-z &= 5 \\ x+y &= 7 \\ 2x+2y-z &= 12 \end{cases};\ \begin{cases} x+y-z &= 5 \\ x+y &= 7 \end{cases}.$$

7. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada (¿qué se va a hacer?).

$$(a)\ \begin{cases} 3x+5y &= 2 \\ -2x+4y &= 6 \end{cases}. \qquad (d)\ \begin{cases} x-3y &= 0 \\ 3x+y &= 0 \\ 3x-3y &= 1 \end{cases}. \qquad (g)\ \begin{cases} 2x+y-z &= 8 \\ x-y+z &= 1 \\ 5x+y-z &= 17 \end{cases}.$$

$$(b)\ \begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ x-2y+z &= 3 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases}. \qquad (e)\ \begin{cases} x+2y-z+2t &= 0 \\ x+y+z+2t &= 1 \\ -x+y-5z-2t &= -3 \end{cases}. \qquad (h)\ \begin{cases} 2x+y-z &= 3 \\ x-y+z &= 2 \\ 5x+y-z &= -5 \end{cases}.$$

$$(c)\ \begin{cases} x+2y-z &= 2 \\ 2x+y+z &= 1 \\ x+5y-4z &= 5 \end{cases}. \qquad (f)\ \begin{cases} x-2y+z &= 2 \\ 2x+y-z &= 2 \\ 3x-y+2z &= 4 \end{cases} \qquad (i)\ \begin{cases} 3y-2z+3w &= 9 \\ 2x+y+w &= 5 \\ x-y+z-w &= -2 \end{cases}.$$

8. Agregar una ecuación al sistema lineal $S : \begin{cases} 3x-y+z &= 1 \\ 4x+2y-2z &= 0 \end{cases}$ de manera que resulte:

   (a) compatible determinado.
   (b) compatible indeterminado.
   (c) incompatible.

9. Construir:

   (a) Dos sistemas lineales distintos de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que $(-1, 2, -5)$ sea la única solución de cada sistema.
   (b) Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que tenga infinitas soluciones y $(-1, 2, -5)$ sea una de ellas.

10. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si indicamos con n la cantidad de incógnitas de un **sistema no homogéneo**, y con m la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, puede ser que ese sistema tenga o no solución en cualquiera de los siguientes casos:
      - Si vale $m < n$.
      - Si vale $m = n$.
      - Si vale $m > n$.
   (b) Si un sistema lineal tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.
   (c) La ecuación $x + y = 0$ no tiene solución.

(d) Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde al menos uno de los a_i es no nulo, siempre tiene solución.

(e) Si cada ecuación de un sistema lineal tiene solución, entonces todo el sistema es compatible.

(f) Si una ecuación de un sistema lineal no tiene solución, entonces todo el sistema es incompatible.

11. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo sistema homogéneo tiene, al menos, una solución.

(b) Los sistemas homogéneos tienen, siempre, infinitas soluciones.

(c) Si indicamos con n la cantidad de incógnitas de un **sistema homogéneo**, y con m la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, puede ser que ese sistema tenga o no solución en cualquiera de los siguientes casos:

- Si vale $m < n$.
- Si vale $m = n$.
- Si vale $m > n$.

12. En el estanque de un establecimiento de cría ictícola hay tres tipos de peces (indicados con I, II y III, respectivamente) que son nutridos con los alimentos A, B y C. El consumo semanal promedio de cada pez (tomado en unidades básicas) está dado por la tabla:

	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Pez Tipo I	1	1	2
Pez Tipo II	3	4	6
Pez Tipo III	2	1	5

Semanalmente se vierten en el estanque 14000 unidades del alimento A, 12000 unidades del B y 31000 unidades del C. Toda la comida es ingerida y los peces están bien alimentados. ¿Cuántos peces de cada tipo hay en el estanque?

13. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte • compatible determinado, • compatible indeterminado, • incompatible. En los primeros dos casos, determinar el conjunto de soluciones.

$$(a)\ \begin{cases} (k^2-9)x + y + kz &= 0 \\ (k-1)y + z &= 0 \\ (k+2)z &= 0 \end{cases}, \qquad (f)\ \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 2x + (k+1)y &= 3 \\ x + y + (k^2-5)z &= k \end{cases},$$

$$(b)\ \begin{cases} x + y + z &= k \\ x + ky + z &= 1 \\ kz &= 2 \end{cases}, \qquad (g)\ \begin{cases} x + y &= 1 \\ kx + k^2 z &= 1 \end{cases},$$

$$(c)\ \begin{cases} 6x + ky + 3z &= 9 \\ kx + (3-k)z &= 3 \\ 7x + ky + (4+k)z &= 12 \end{cases}, \qquad (h)\ \begin{cases} x - y &= -1 \\ kx - 2z &= 1 \\ k^2x + (k^2-7k+6)z &= k^2-k-3 \end{cases},$$

$$(d)\ \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ (k+2)x + ky - z &= 0 \\ -x + y - 2z &= -1 \end{cases}, \qquad (i)\ \begin{cases} x + ky + 2z - w &= k+2 \\ x + ky - 2z &= 2 \\ 3x + 3ky + 2z - 2w &= k \end{cases}.$$

$$(e)\ \begin{cases} 2x + 3y - z &= 3 \\ x - y + 3z &= 1 \\ 3x + 7y - 5z &= k^2 \end{cases},$$