Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Departamento de Matemática

Elementos de Cálculo Numérico (Cs. Biológicas)

Práctica N°4: Geometría Lineal.

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L:

   (a) $L: t(-2,3)+(2,2)$; $\quad P_1=(2,2),\ P_2=(-2,3),\ P_3=(0,0),\ P_4=(12,-13),\ P_5=(2,-1)$.
   (b) $L: t(-1,1)+(3,-3)$; $\quad P_1=(3,-3),\ P_2=(0,0),\ P_3=(-1,1),\ P_4=(3,4),\ P_5=(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

2. Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación implícita y la ecuación explícita de la recta que:

   (a) pasa por $P=(-1,2)$ con vector director $v=(3,1)$.
   (b) pasa por $P=(1,-4)$ y $Q=(-1,-3)$.
   (c) que es paralela a la recta $L:\ t(-2,3)+(1,-1)$ y pasa por $P=(1,-4)$.
   (d) que pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4,-5)$ y $(\frac{1}{2},3)$.
   (e) es perpendicular a la recta $L:\ t(2,3)+(5,7)$ y pasa por $P=(-3,1)$.

3. Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta de ecuación:

   (a) $y=3x-2$. $\quad (c)$ $y=4$. $\quad (e)$ $x=4y-\frac{1}{2}$.
   (b) $2x-3y=5$. $\quad (d)$ $x=-5$.

4. En cada uno de los siguientes casos, dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta que:

   (a) está dirigida por $v=(0,1,0)$ y pasa por $P=(0,2,4)$.
   (b) pasa por l,os puntos $P=(-2,3,4)$ y $Q=(-1,3,1)$.
   (c) es paralela al eje z y pasa por $P=(1,2,3)$.
   (d) que es paralela a la recta $L:\ t(2,4,-5)+(0,3,-1)$ y pasa por $P=(3,-1,2)$.
   (e) es perpendicular a la recta $L:\ t(1,-2,1)+(3,5,7)$ y pasa por $P=(1,9,-3)$. ¿Es única?

5. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por los vectores v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:

   (a) $v=(0,1,0),\ w=(1,0,0)$ y $P=(0,0,1)$.
   (b) $v=(0,2,0),\ w=(1,1,0)$ y $P=(0,1,1)$.

   Graficar los planos hallados en (a) y (b) y compararlos.

6. Dar las ecuaciones paramétricas de:

   (a) un plano que contenga al eje z y a la recta dirigida por $v=(1,2,1)$ que pasa por el origen.
   (b) la recta que está en la intersección del plano xz con el plano yz.

7. Dar la ecuación vectorial:

   (a) de la recta que pasa por los puntos $(2,1,3)$ y $(3,-2,5)$.
   (b) del plano que pasa por los puntos $(2,1,2),\ (1,1,1)$ y $(3,2,7)$.

(c) del plano que pasa por el punto $(1,2,1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.

(d) del plano que es paralelo a la recta $L:\ t(1,2,-4)+(1,2,1)$ y contiene los puntos $P=(2,2,1)$ y $Q=(1,2,-3)$.

8. (a) Decidir si los puntos $A=(1,1,1),\ B=(-2,0,1)$ y $C=(3,0,2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.

   (b) Decidir si los puntos $A=(8,2,4),\ B=(4,2,8),\ C=(-2,0,1)$ y $D=(1,-1,3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

9. Dado el plano $\pi:\ 2x-5y+3z=11$;

   (a) Hallar **todos** los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales $(2,a,7)\in\pi$.

   (b) Decidir si existe algún valor de $a\in\mathbb{R}$ tal que $(0,3a,a)\in\pi$.

10. Sea π el plano que contiene a la recta $L:\ t(1,-2,1)+(1,0,2)$ y contiene al punto $P=(2,2,3)$.

    (a) Decidir si los puntos $P=(1,-2,1)$ y $Q=(3,3,4)$ pertenecen o no a π.

    (b) Hallar **todos** los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales $(a,2a+1,a-3)\in\pi$.

11. Determinar, en cada uno de los siguientes casos, si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

    (a) $L:\ t(1,0,-1)+(-1,1,2)$; $\quad L':\ t(-1,1,2)+(1,0,-1)$.

    (b) $L:\ t(1,1,-1)+(-1,2,2)$; $\quad L':\ t(2,2,-2)+(1,0,-1)$.

    (c) $L:\ t(1,\frac{1}{2},-1)+(-1,1,2)$; $\quad L':\ t(-2,-1,2)+(3,3,-2)$.

    (d) $L:\ t(1,0,-1)+(-1,1,2)$; $\quad L':\ t(1,-2,6)+(3,3,-3)$.

    (e) $L:\ t(1,2,-1)+(-1,-1,2)$; $\quad L':\ t(-1,1,1)+(3,2,-1)$.

12. (a) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta $L:\ t(1,1,-1)+(-1,2,2)$.

    (b) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta de ecuaciones $2x-3y-z=1$ y $x-y+z=2$.

    (c) Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por $P=(2,1,7)$ con vectores directores $v=(1,0,4)$ y $w=(4,-1,3)$.

    (d) Dar las ecuaciones paramétricas del plano $\pi:\ 2x-y+3z=1$.

13. Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por P:

    (a) $P=(1,-1,2)$; $\quad\pi$ pasa por los puntos $(0,2,0),\ (-1,1,2)$ y $(0,5,5)$.

    (b) $P=(3,3,3)$; $\quad\pi$ está dirigido por $v=(1,2,1)$ y $w=(-2,2,-3)$ y pasa por $Q=(0,5,4)$.

    (c) $P=(2,1,0)$; $\quad\pi:\ 3x-y+2z=4$.

    (d) P es la intersección de las rectas $L:\ t(1,1,1)+(1,0,1)$ y $L':\ t(1,-1,2)+(0,3,-2)$; $\pi:\ y=3$.

14. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.

    (a) $\pi_1:\ 3x-2y+4z=1$; $\quad\pi_2$ está dirigido por $v=(2,2,0)$ y $w=(-3,2,1)$ y pasa por $(2,2,2)$.

    (b) $\pi_1:\ 3x-2y-1=0$; $\quad\pi_2$ pasa por los puntos $(3,1,4),\ (0,0,-2)$ y $(1,-1,-1)$.

    (c) $\pi_1:\ 4x+2-3z=1$; $\quad\pi_2:\ 2x+y-\frac{3}{2}z=1$.

(d) π_1 pasa por $(-1,1,2)$ con vector normal $N = (1,2,-1)$; π_2 pasa por $(1,1,1)$, $(2,3,1)$ y $(-1,-2,2)$.

15. Sea L la recta que pasa por los puntos $P = (0, k+3, 2k)$ y $Q = (k^2, -k-2, -1)$ y sea π el plano de normal $N = (1,1,-1)$ que pasa por $A = (5,7,7)$. Determinar **todos** los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $L \cap \pi = \emptyset$.

16. (a) Encontrar **todos** los puntos de la recta $L: \ t(1,-1,0) + (2,1,-1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2,1,-1)$.
    (b) Hallar el punto Q de la recta $L: \ t(2,-1,4)$ más próximo al punto $P = (-4,8,1)$.

17. Hallar las siguientes distancias:
    (a) entre la recta $L: \ t(1,1) + (3,0)$ y $P = (-1,1)$.
    (b) entre la recta $L: \ t(1,1,0) + (3,0,0)$ y $P = (-1,1,0)$.
    (c) entre el plano π que tiene vector normal $N = (1,-1,2)$ y pasa por $(1,2,1)$ y el punto $P = (1,2,5)$.

18. Un punto se desplaza por el espacio, de modo que en el instante t su posición viene dada por el vector $x(t) = (1-t)e_1 + (2-3t)e_2 + (2t-1)e_3$; donde $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$.
    (a) Mostrar que el punto se mueve a lo largo de una recta.
    (b) Hallar el instante t en que el punto toca al plano $\pi: \ -2x + 3y + 2z = 0$.
    (c) Calcular, para cada valor de t, la distancia del punto al plano π.
    (d) Hallar el instante t en que el punto está más cerca del origen. Dar el punto correspondiente y la distancia.

19. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1,2,-1)$ y pasa por $(-1,3,1)$. Sea L_2 la recta que pasa por $(-1,1,3)$ y por $(1,2,7)$.
    (a) Determinar si L_1 y L_2 se intersecan o no.
    (b) Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, hallar un plano que contenga a ambas rectas y dar el ángulo entre ellas.
    (c) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1, 1-3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2.

20. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1: x - y = 1$, $L_2: \ x + y = 3$.
    (a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.
    (b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_2) = \angle(L_1, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

21. Hallar las ecuaciones implícitas de la recta:
    (a) L es intersección del plano xy con el plano yz.
    (b) $L: \ t(1,0,-1) + (-1,1,2)$.
    (c) L pasa por los puntos $(-5,3,7)$, $(2,-3,3)$.

22. Se consideran las rectas $L_1: \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 4x - y - 2z &= 9 \end{cases}$ y $L_2: \ t(1,0,2) + (1,2,-3)$.
    (a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas y que $P = (2,2,-1)$ pertenece a L_2.
    (b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por P.
    (c) Hallar $Q = L_1 \cap \pi$ y $d(P,Q)$.
    (d) ¿Qué significa en este problema el número $d(P,Q)$?

23. Sean $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, -1)$ y $C = (0, -2, -1)$.

   (a) Hallar la recta L que pasa por A y B.

   (b) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por C.

   (c) Hallar $D = L \cap \pi$ y los valores $d(A, B)$ y $d(C, D)$.

   (d) Usando los cálculos hechos dar el área del triángulo de vértices A, B y C.

24. Sean π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$.

   (a) Probar que L es paralela a π y que $P = (2, 1, 1)$ pertenece a L.

   (b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por P.

   (c) Hallar $Q = L' \cap \pi$ y $d(P, Q)$.

   (d) ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?