

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°5: Subespacios - Rango de una Matriz.

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

- (a) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.
- (b) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 0\}$.
- (c) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\}$.
- (d) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$.
- (e) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - 4x_2^2 = 0\}$.
- (f) $S \subset \mathbb{R}^5$; $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera el conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ dado por $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = a\}$. Graficar S y mostrar que S es un subespacio si y sólo si $a = 0$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Probar que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v^t = 0\}$, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

4. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y analizar si son subespacios o no:

- (a) $S = \{t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (b) $S = \{t(1, 2) + (2, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (c) $S = \{t(1, -2) + (-2, 4) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (d) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
- (e) $S = \{s(1, 2) + t(2, 4) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
- (f) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R} \text{ con } s + t = 1\}$.

5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sean v_0, v_1 y $v_2 \in \mathbb{V}$.

- (a) Probar que $S = \{t \cdot v_0 : t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
- (b) Probar que $T = \{s \cdot v_1 + t \cdot v_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
- (c) Describir geoméricamente los subespacios S y T .

6. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^2$ $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$. Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de v_1 y v_2 . ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

7. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$; $v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.
- (b) $S = \langle (1, 2, 3), (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$; $v = (-5, -10, -15)$.
- (c) $S = \langle (1, -1, 2, 1), (2, 1, 3, 0) \rangle$; $v = (0, -3, 1, 1)$.

8. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ con las condiciones:

- (a) que contenga al vector $v = (1, 2, 3)$.
- (b) que contenga al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contenga al vector $w = (0, 1, 1)$.

9. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^n$ o no:

- (a) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1)\}$.
- (b) $n = 2$, $\{(-1, 1), (2, -2)\}$.
- (c) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1), (3, 4)\}$.
- (d) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$.
- (e) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}$.
- (f) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$.
- (g) $n = 5$, $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1)\}$.

10. Hallar un sistema de generadores para cada uno de los siguientes subespacios
- $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$.
 - $S \subset \mathbb{R}^5$; $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.
 - $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
 - $S = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0) \rangle$.
11. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{V}$, un espacio vectorial real.
- $\{(1, -3, 5), (-2, 2, 1), (-1, -1, 6)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $(1, 2, 3, 4, 5); \mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.
 - $\{(1, 2, 2, -1), (0, 2, -2, -3), (1, 1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
 - $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{v\}$ con $v \in \mathbb{V}$; $\{v_1, v_2\}$ con $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.
 - $\{v_1, v_2, \dots, v_n, 0\}$ con $v_1, v_2, \dots, v_n, 0 \in \mathbb{V}$.
12. Hallar (si es posible) tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.
13. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en $\mathbb{V}$:
- $\{(0, -1, k), (1, -1, 2), (-1, 0, 2)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, -1, 2), (k+1, k, k+6), (k, k+1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(k-2, k, 1, 0), (0, k, 0, 0), (1, 1, 0, k-1), (2, -1, -1, k-1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
14. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores son o no base del espacio $\mathbb{V}$. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender a una base de $\mathbb{V}$.
- $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 3)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.
15. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los subespacios del ejercicio ??.
16. Sea $S = \langle (0, -1, k), (1, -1, 0), (-1, 0, 2) \rangle$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio S en función de k .
17. Para los siguientes subespacios S y T hallar una base de S , T , $S \cap T$ y $S + T$. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?
- $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$,
 $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0, x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$.
 - $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $T = \langle (1, 1, 1), (0, -2, 0) \rangle$.
 - $S = \langle (1, 1, 2), (1, -1, 0) \rangle$, $T = \langle (2, 0, -1), (-1, 0, \frac{1}{2}) \rangle$.
 - $S = \langle (1, 2, 3, -1), (0, -1, 2, 0), (2, 0, 1, 2), (-1, -2, -1, 1) \rangle$,
 $T = \langle (1, 2, 1, 3), (0, -1, 0, 2), (2, 0, 2, 1), (-1, -1, -1, -2) \rangle$.

18. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, \lambda) \rangle$:
- hallar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $S \cap T \neq \{0\}$.
 - para cada valor λ hallado en (a), encontrar una base de $S \cap T$.
19. Para $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_2 - x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$:
- Hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, a, -2, b) \in S \cap T$.
 - Dar dos bases distintas de $S \cap T$.
 - Decidir si es posible dar tres vectores linealmente independientes en el subespacio $S \cap T$.
20. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$; $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \langle (2, -1, -1, 3), (1, 1, 0, -2), (4, 1, -1, -1) \rangle$:
- Hallar $\mathcal{B}_1$ una base del subespacio $S \cap T$.
 - Extender la base $\mathcal{B}_1$ a una base de S . Hacer lo mismo para una base de T .
 - Hallar $\mathcal{B}_2$ una base del subespacio $S + T$ que contenga a $\mathcal{B}_1$.
 - Extender $\mathcal{B}_2$ a una base de $\mathbb{R}^4$.
21. Dadas las matrices $A = (1, 1, 0, 1)$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
- $$E = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
- calcular la dimensión y una base del espacio fila; del espacio columna y del núcleo.
 - calcular el rango.
 - repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.
22. Para las matrices en $\mathbb{R}^{3 \times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- hallar una base y la dimensión de los subespacios $N(A)$, $N(B)$, $N(A) \cap N(B)$ y $N(A) \cap N(A^t \cdot A)$.
23. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Si $m = n = 10$ y $rg(A) = 6$; calcular $\dim(N(A))$.
 - Si $m = 7$, $n = 8$ y $rg(A) = 2$; calcular $\dim(N(A))$.
 - Si $m = 4$, $n = 5$ y $\dim(N(A)) = 3$; calcular $rg(A)$.
 - Si $m = 3$, $n = 5$ y $\dim(E_C(A^t)) = 3$; calcular $\dim(N(A))$.
 - Si $m = 3$, $n = 4$ y $\dim(E_C(A)) = 2$; calcular $\dim(N(A))$.
 - Si $m = n = 4$ y $\dim(E_C(A)) + \dim(E_C(A^t)) = 6$; calcular $\dim(N(A))$.
24. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(a) Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.

(b) Calcular los subespacios $\dim(N(A))$, $\dim(N(A^t))$, $\dim(E_F(A))$, $rg(A)$ y $rg(A^t)$

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y S el sistema $S : \begin{cases} ax + y + bz = 0 \\ 2ax - y + bz = 0 \end{cases}$.

Hallar a y b tales que el subespacio $N(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S .

26. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

27. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ una matriz tal que $rg(A) = 2$.

(a) Determinar si el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución no nula.

(b) Calcular la dimensión del espacio de soluciones del sistema $A^t \cdot x = 0$.

28. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $rg(A) = 2$.

(b) Para el valor de b hallado, analizar si $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

29. Para cada uno de los siguientes subespacios S , hallar $m, n \in \mathbb{N}$; y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que $N(A) = S$.

(a) $S = \langle (1, 3) \rangle$.

(c) $S = \langle (1, 3, 1), (-2, 1, 0), (-1, 4, 1) \rangle$.

(b) $S = \langle (1, 3, 1), (-2, 1, 0) \rangle$.

(d) $S = \langle (1, 3, 1, -2), (-2, 1, 0, 3), (-1, 4, 1, 1), (3, 2, 1, -5) \rangle$.

30. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\}$:

(a) Hallar la dimensión y una base $\mathcal{B}$ de $S \cap T$.

(b) Dar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^4$ que no sean combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

(c) Hallar $m, n \in \mathbb{N}$; y $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dos matrices distintas tales que $A \cdot v^t = B \cdot v^t = 0$ para todo $v \in S \cap T$.

31. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son dos matrices tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$.

Calcular $rg(A \cdot B \cdot A)$, $\dim(N(A \cdot B \cdot A))$ y hallar una base de $N(A \cdot B \cdot A)$.

32. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle (2, 3, -1), (-2, 1, 5), (4, 2, -6) \rangle$:

(a) Probar que $T \subset S$.

(b) Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T = S$ o no.

33. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha + 2)x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + (\alpha^2 - 7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2 - 11)x_2 + (2\alpha + 7)x_3 + 2x_4 = 0\}$

(a) Calcular $\dim(S \cap T)$ en términos del valor α .

(b) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 1$, hallar una base de $S \cap T$.

(c) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 2$, hallar una base de $S + T$.

34. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & (k+2) & (k+3) \\ -1 & (k^2-7) & -1 & (-2k-6) \\ 1 & (k^2-11) & (2k+7) & (k-9) \end{pmatrix}$.

- (a) Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\dim(N(A)) = \dim(E_F(A^t))$.
- (b) Para cada k hallado, calcular una base de $N(A)$ y una base de $N(A^t)$.

35. Sean S y T subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 4$.

- (a) Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
 - (i) $S \subset T$. (ii) $\dim(S+T) = 7$. (iii) $\dim(S \cap T) = 4$. (iv) $S \cap T = \emptyset$.
- (b) Si $\dim(S \cap T) = 3$, ¿qué puede decirse de S y T ?
- (c) Si $\dim(S+T) = 4$, ¿qué puede decirse de S y T ?
- (d) Si $S \subset T$, calcular $\dim(S+T)$ y $\dim(S \cap T)$.

36. Sean $P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ y $Q \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ tales que $\text{rg}(P) + \dim(N(Q)) = 6$ y $\dim(E_F(P^t)) = 5$.

- (a) Calcular $\dim(N(P))$, $\text{rg}(P)$, $\dim(N(Q))$ y $\text{rg}(Q)$.
- (b) Calcular $\dim(E_C(Q^t \cdot P^{-1}))$.
- (c) Calcular $\dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$, si $W \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ es una matriz tal que $\dim(N(W)) = 3$.