Elementos de Cálculo Numérico (Cs. Biológicas)

Práctica N°7: Diagonalización.

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \text{(b)} \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \text{(c)} \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{(d)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{(f)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}, \text{(g)} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{(h)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{(i)} \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Analizar si cada una de las siguientes matrices A, es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que la diagonalice.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{(e)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}, \text{(g)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{(i)} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{(h)} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{(j)} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Probar que A es diagonalizable y hallar una base de $\mathbb{R}^2$ de autovectores de A.

   (b) Hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

   (c) Calcular A^{10}.

4. Mostrar que las siguientes matrices A y B no son diagonalizables cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que:

   (a) si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ entonces A es diagonalizable.

   (b) si $(a-d)^2 + 4bc < 0$ entonces A **no** es diagonalizable.

   (c) ¿qué puede decirse si $(a-d)^2 + 4bc = 0$?

6. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que:

   (a) $\lambda = 1$ es autovalor de A. Para cada k hallado, dar una base del autoespacio $S_1(A)$.

   (b) $\lambda = 2$ es autovalor de B. Para cada k hallado, dar una base del autoespacio $S_2(B)$.

7. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

   Hallar los autovalores y autovectores asociados de: (a) A, (b) A^3, (c) A^9.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.

   (b) Probar que A es diagonalizable y hallar C inversible que diagonalice a A.

   (c) Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A.

   (d) Escribir al vector v como combinación lineal de la base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A.

   (e) Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.

   (b) Probar que A **no** es diagonalizable.

   (c) Escribir al vector v como combinación lineal de los autovectores de A.

   (d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

    (a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A.

    (b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

11. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A resulta **no** diagonalizable para las siguientes matrices:

    (a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} (2a+4) & (1-a) & (-2a-a^2) \\ 0 & (4-a) & 0 \\ 0 & 0 & (4-a^2) \end{pmatrix}$.

12. Sea $A = \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 & 0 \\ b^3 - b & a^2 - 1 & 0 \\ b^2 - 1 & b^2 - b & a^3 - a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

    (a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene autovalor triple.

    (b) Para cada a hallado, dar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que A es diagonalizable.

13. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Decidir si A es o no diagonalizable y determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $(2a+6; a^2-4, 2)$ es autovector de A.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

    (a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

    (b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2+1, 2)$ es autovector de A.

15. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se sabe que $v = (1,2,0)$, $w = (2,6,0)$ y $u = (-2,-2,-1)$ son autovectores de A.

    (a) Calcular los autovalores de A.

    (b) Analizar si A es o **no** diagonalizable.

    (c) Calcular r, s y t.

16. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1,1,1) \in N(I-A)$.

    (a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A.

    (b) Dar una base de los autoespacios correspondientes a los autovalores. ¿Es A diagonalizable?

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz con autovalores $\{-1, 1, 2\}$.

    (a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.

    (b) Mostrar que $B = A^2 + 3A - I$ es diagonalizable.

18. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.

    (a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.

    (b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.

    (c) Probar que $H = A + I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1}. ¿Es H diagonalizable?

    (d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.

19. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k^3 & 0 \\ k & 2 & k^2 & 0 & k^4 \\ 0 & k^2 & 3 & k^5 & -k \\ k^3 & 0 & k^5 & 4 & k^2 \\ 0 & k^4 & -k & k^2 & 5 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

20. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz **diagonalizable** tal que $\lambda = \frac{1}{2}$ es raíz de χ_A de multiplicidad 3. Sean B y C las matrices: $B = 2A + 3I$, $C = (A - I)^3$.

    (a) Determinar si A es o no inversible.

    (b) Calcular $\det(B)$ y $\operatorname{tr}(B)$; $\det(C)$ y $\operatorname{tr}(C)$.

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de χ_A. Sean B y C las matrices: $B = 5A^2 + 3A - 2I$, $C = 4A^2 + \alpha I$.

   (a) Mostrar que A es inversible y calcular $\det(A^{-1})$ y $\operatorname{tr}(A^{-1})$.

   (b) Calcular $\det(B)$ y $\operatorname{tr}(B)$.

   (c) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales C no es inversible.

22. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A, $\operatorname{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

   (a) Hallar **todos** los autovalores de A.

   (b) Decidir si A^t es o no diagonalizable.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$, $\operatorname{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

   (a) Calcular los autovalores de A.

   (b) Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz inversible tal que $\operatorname{tr}(A) = -2$, $\operatorname{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $\chi_A(1) = 8$. Probar que A es diagonalizable. Justificar con claridad.

25. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$.

   (a) Calcular $\det(A)$ y $\operatorname{tr}(A)$.

   (b) Probar que $A^4 - 7A^3 + 17A^2 - 17A + 6I = 0$.

26. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$

   (a) Probar que $A^3 - 4A^2 + 10A = 15I$.

   (b) Probar que $A^3 - 4A^2 + 6A - 12I = -4A + 3I$.