## Cálculo Numérico (Biología) - Finales Abril-Mayo 2006

Examen Final

El final consiste en desarrollar 4 de los 13 ítems de la lista de aquí abajo. En el momento del examen se entregaran al alumno los ítems seleccionados así como también una copia completa de la lista.

Cada ítem tiene un máximo de 25 puntos. Para aprobar se necesita un mínimo de 50 puntos. La nota del final surge de la siguiente tabla:

| 0 | 20 | 40 | 50 | 55 | 65 | 70 | 75 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

**Item 1.** Dados tres puntos $Y$, $W$ y $Z$, enunciar el teorema de Pitágoras en términos de los vectores $Y - Z$, $W - Z$ e $Y - W$.

Elegir el punto a) o el punto b). Hacer uno solo.

a) Demostrar el teorema de Pitágoras en forma geométrica mediante un dibujo.

b) Demostrar el teorema de Pitágoras haciendo cuentas con el producto interno.

**Item 2.** Definir las tres operaciones elementales entre filas de una matriz $A$. Definir cuándo una matriz $E$ es de forma escalonada reducida.

a) Vale: Las tres operaciones elementales son inversibles. Explicar que significa esto y demostrarlo.

En los dos puntos b) y c) no se pide que demuestren nada, estan puestos para ser usados en lo que sigue despues.

b) Vale: Si se aplican operaciones elementales de filas, la matriz que resulta corresponde a un sistema que tiene el mismo conjunto de soluciones que el sistema asociado a la matriz original.

c) Vale: Por medio de operaciones elementales de filas siempre se puede llevar una matriz $A$ a la forma escalonada reducida; $A \rightsquigarrow^{Gauss} \rightsquigarrow E$ (metodo de Gauss).

Sea $A$ una matriz cuadrada y $(A \,|\, I) \rightsquigarrow^{Gauss} \rightsquigarrow (E \,|\, C)$, donde $E$ es escalonada reducida. Demostrar utilizando a) y b):

d) Si $E = I$, entonces A es inversible y $C = A^{-1}$.

e) Si $E \neq I$, entonces $A$ no es inversible.

f) Argumentar que d) y e) demuestran que $A$ es inversible $\Leftrightarrow$ $E$ es inversible y que ademas, por c), se tiene un metodo para calcular la inversa de una matriz cuando esta existe.

**Item 3.**

a) Explicar que $k$ vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes si y solo si el sistema $AX = 0$ (donde $A = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ es la matriz formada con los vectores como columnas) tiene como única solución la solución nula (notar que $A$ no es una matriz cuadrada a menos que $k = n$).

b) Utilizando el item 2 demostrar que una matriz cuadrada $A$ es inversible si y solo si el sistema $AX = 0$ tiene como unica solucion la solucion cero.

**Item 4.** Enunciar el comportamiento del determinante respecto a las tres operaciones de filas elementales (propiedades D2, D3 y D4 en la teorica). Demostrar:

a) Si $A \rightsquigarrow^{Gauss} \rightsquigarrow E$, entonces $det(E) = \lambda det(A)$, para un escalar $\lambda \neq 0$. Deducir que $det(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; det(A) \neq 0$.

b) Demostrar que de a) se sigue (utilizar tambien los items anteriores):

$A$ es inversible $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$.

**Item 5.** Sea $A$ una matriz cuadrada de $n \times n$. Demostrar:

a) Existe una base de vectores propios $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$ si y solo si existe una matriz inversible $C$ tal que $C^{-1}AC = D$, donde $D$ es una matriz diagonal. En ese caso, las columnas de $A$ son los vectores propios, y en la diagonal de $D$ se tienen los valores propios. Se dice que $A$ es diagonalizable.

b) Sean $A$ una matriz de $n \times n$, $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$ vectores propios correspondientes a valores propios $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$ distintos ($\lambda_i \neq \lambda_j\ \forall\, i \neq j$). Demostrar (sólo para el caso $k = 2$) que son linealmente independientes.

c) Deducir que si el polinomio característico de $A$ tiene $n$ raíces reales distintas entonces $A$ es diagonalizable. Dar un contraejemplo que demuestre que la implicacion en el otro sentido es falsa.

**Item 6.** Si $A$ es una matriz cuadrada, $\chi_A(x)$, $Tr(A)$ y $det(A)$ indican el polinomio característico, la traza y el determinante respectivamente.

a) Demostrar la implicación

$$A \sim B\ \Rightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x).$$

(donde $A \sim B$ indica que $A$ y $B$ son matrices semejantes).

b) Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene la fórmula :

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(A) x^{n-1} + (terminos\ de\ grado < n-1) + det(A)$$

Escribir y demostrar la fórmula en el caso $n = 3$.

c) Deducir de a) y b) que si $A$ es una matriz diagonalizable entonces $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ y $det(A) = \lambda_1\, \lambda_2 \ldots\ \lambda_n$, donde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ son los valores propios.

Cuadrados Mínimos

**Item 7.** Dados $n$ números $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ distintos ($x_i \neq x_j\ \forall\, i \neq j$) y otros $n$ números $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, se considera un entero $k$ bastante menor que $n$ y se busca un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x +\ \ldots\ a_k x^k$ tal que los valores $z_1 = p(x_1)$, $z_2 = p(x_2),\ \ldots,\ z_n = p(x_n)$ mejor aproximen a los números $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ , en el sentido que se minimiza la suma $(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (z_n - y_n)^2$.

Utilizando los ítems 8, 9 y 10 explicar y desarrollar un método para encontrar tal polinomio y demostrar por qué el método siempre funciona.

**Item 8.** Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio, $Y \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ($n$ filas y $k$ columnas).

a) Sea $Z \in S$ un vector de $S$ tal que el vector $Y - Z$ es ortogonal a $S$. O sea, $\langle Y - Z,\ W\rangle = 0\ \forall\, W \in S$. Demostrar usando el ítem 1 que $Z$ minimiza la distancia de $Y$ a puntos de $S$.

b) Sea $S = A(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que si $P \in \mathbb{R}^k$ es solución del sistema (de $k \times k$) $(A^t A)X = A^t Y$, entonces $Y - AP$ es ortogonal a $S$.

**Item 9.** Demostrar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ es tal que las $k$ columnas son vectores linealmente independientes, entonces la matriz cuadrada $A^t A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ es inversible. Sugerencia: utilizar el item 3.

**Item 10.** Dados $n$ números $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ distintos ($x_i \neq x_j\ \forall\, i \neq j$) y un entero $k < n$, se tienen $k + 1$ vectores:

$$v_0 = (1,\ 1,\ \ldots,\ 1),\ \ v_1 = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \ \ldots\ \ v_k = (x_1^k,\ x_2^k\ \ldots\ x_n^k)$$

Demostrar que son linealmente independientes. Hacerlo para el caso de tres vectores, es decir, para $k = 2$ ($n$ sigue siendo arbitrario).

Markov

**Item 11.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de Markov, $b \in \mathbb{R}^n$ y $N = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Entonces:

$$Prop: \ Si\ c = Ab,\ tambien\ se\ tiene\ N = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

a) Considerar la interpretación en la que se consideran $n$ cajas $C_i$ con $N$ bolitas repartidas entre ellas, $b_i$ bolitas en la caja $C_i$. Explicar cuál es la interpretación de los coeficientes $a_{ij}$ de la matriz $A$ y qué significa el producto matricial $Ab$. En base a ello deducir que la *Prop* es claramente cierta.

b) Demostrar la *Prop* con una cuenta, independientemente de cualquier interpretación.

**Item 12.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de Markov y $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos

$$v(0) = b,\ v(1) = Av(0), \quad \ldots \quad v(k) = Av(k-1) = AA^{k-1}v(0) = A^k v(0).$$

Supongamos que existe el límite $v(\infty)$ de la sucesión de vectores $v(k)$:

$$v(\infty) = \lim_{k\to\infty} v(k), \ \ (\text{también escribimos } v(k) \to v(\infty)).$$

Demostrar que $v(\infty)$ es un estado de equilibrio de $A$.

**Item 13.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de Markov, y sea $A^\infty$ el límite $A^\infty = \lim_{k\to\infty} A^k$ (en caso que este líimite exista, lo que significa que existen los límites para cada lugar $i, j$ de $A^k$). También escribimos $A^k \to A^\infty$. Dado $b \in \mathbb{R}^n$, sea

$$v(0) = b,\ v(1) = Av(0), \quad \ldots, \quad v(k) = Av(k-1) = AA^{k-1}v(0) = A^k v(0).$$

Demostrar la equivalencia de los dos enunciados siguientes:

i) El límite $A^k \to A^\infty$ existe y la matriz $A^\infty$ tiene todas sus columnas iguales.

ii) Cualquiera sea el vector $b \in \mathbb{R}^n$, la sucesión de vectores $v(k)$ converge y además siempre a un mismo vector $v(\infty)$.