

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°1: Operaciones Vectoriales.

1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{v} + \vec{w}$.	(d) $3\vec{u} + 3\vec{v}$; $3(\vec{u} + \vec{v})$.
(b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.	(e) $\vec{u} - \vec{v}$.
(c) $3\vec{u}$; $3\vec{v}$.	

2. Sea $\vec{w} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:

(a) $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}\}$.
(b) $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.
(c) $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}, 1 \leq t \leq 2\}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$.	(d) $2\vec{u}$.
(b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.	(e) $-3\vec{w}$.
(c) $\vec{u} - \vec{v}$.	(f) $-\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.

4. En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α , 148 de cepa β y 290 de cepa γ . Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α , 48 de cepa β y 110 de cepa γ . A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector PI de población inicial, el vector N_7 de natalidad durante julio, el vector M_7 de mortalidad durante el mismo mes y el vector PF de población final al terminar el mes.

5. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre P y Q siendo $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 2)$.

6. Dados los puntos $A = (1, 7, 3)$, $B = (-1, 3, 0)$ y $C = (3, -4, 11)$ determinar:

(a) los vectores $\overrightarrow{AB} = B - A$ y $\overrightarrow{BC} = C - B$.
(b) el punto medio entre los puntos A y B .

7. Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{z} = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

(a) $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\vec{w} \cdot \vec{w}$.
(b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$; $(\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$.
(c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\vec{w} \cdot \vec{v}$; $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{w}$; $(\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \vec{w})$.
(d) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $3(\vec{v} \cdot \vec{w})$; $\vec{v} \cdot (2\vec{w} - 3\vec{v})$.

8. En el mismo bioterio del problema 4 los precios de los animales son \$1,50 por cada rata de cepa α , \$2,50 cada rata de cepa β y \$4 cada animal de cepa γ . Un comprador necesita 18 animales de cepa α , 24 de cepa β y 20 de cepa γ . Determinar el vector P de precios unitarios del bioterio, el vector C de compra del cliente y el valor total de la compra.

9. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda:
- $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$, $\vec{w} = (-1, -2)$, $\vec{x} = (3, 0)$, $\vec{y} = (-3, 4)$, $\vec{z} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
 - $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 1, 1)$.
 - $(1, 1, -1)$, $(1, 1, -2) + (3, 5, 6)$, $(2, -1, 3)$, $-2 \cdot (2, -1, 3)$ y $2 \cdot (2, -1, 3)$.
10. Normalizar cada uno de los vectores del problema anterior.
11. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
- $A = (1, -3)$; $B = (0, 0)$.
 - $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$.
 - $A = (2, -3)$; $B = (5, 3)$.
 - $C = (1, 2, 3)$; $D = (4, 1, -2)$.
 - $C = (4, -2, 6)$; $D = (3, -4, 4)$.
 - $C = (1, 2, -3)$; $D = (0, 3, 1)$.
12. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:
- $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.
 - $\vec{v} = (1, k, 0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.
 - $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.
 - $A = (1, 1, 1)$, $B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.
13. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:
- $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| = 1\}$.
 - $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| = 1\}$.
 - $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| \leq 1\}$.
 - $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| \leq 1\}$.
14. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:
- $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$.
 - $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$.
 - $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.
15. Hallar:
- Tres vectores en el plano distintos entre sí que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
 - Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
 - Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ distintos entre sí que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
 - Un vector del espacio ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
 - Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).
16. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:
- $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
 - $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.
17. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:
- el ángulo entre ambos vectores.
 - el módulo de $\vec{u} - \vec{v}$.
 - un vector que sea simultáneamente ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
18. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.
19. Calcular el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ para los siguientes vectores:
- $\vec{v} = (3, 5, 1)$; $\vec{w} = (3, 5, 1)$.
 - $\vec{v} = (3, 5, 1)$; $\vec{w} = (7, 4, 3)$.
 - $\vec{v} = (7, 4, 3)$; $\vec{w} = (3, 5, 1)$.
 - $\vec{v} = (2, 0, 0)$; $\vec{w} = (0, 0, 3)$.

20. Sean $\vec{u} = (2, 1, -3)$ y $\vec{v} = (1, -2, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcular $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

(b) Verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

21. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

(a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?

(b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.

(c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (Cs. BIOLÓGICAS)

Práctica N°2: Sistemas Lineales.

1. Decidir cuáles de los siguientes sistemas de relaciones matemáticas son sistemas de ecuaciones lineales (brevemente sistemas lineales):

$$(a) \begin{cases} 3x + 5y - 3z = 7 \\ -2x + 4y - z = 6 \\ \frac{1}{2}x - y + 4z \leq 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} -9x - 3y + z = 3 \\ 5x + \frac{1}{3}y + 2z = 0 \\ 4yz = 0 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} 3x + 5y - 3z = 7 \\ -2x + 4y - z = 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{2}{3}x + 4y - 2z = -1 \\ 3y - 2z = 0 \\ -8x + y - z = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ -8x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} -6x + 9y - 3z = 7 \\ 2z = 0 \\ -4z = 1 \end{cases}$$

2. Se considera el sistema lineal $S : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ y los vectores

$\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (-2, 2, -3, 7)$, $\vec{v}_4 = (0, 2, 2, 2)$. Decidir:

- (a) cuáles de las cuaternas dadas son soluciones de S .
 (b) cuáles de las cuaternas dadas son soluciones del sistema homogéneo asociado a S .
3. Hallar, si es que existen, todos los valores de a , $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, -2, 3)$ es solución del sistema lineal dado en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) \begin{cases} 2bx_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - ax_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - bx_2 + ax_3 = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + 2ax_2 + x_3 = 0 \\ ax_2 - bx_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + (2a + b)x_3 = b \end{cases}$$

4. Se considera el sistema lineal $\begin{cases} x + y - z = a \\ 2x + y = b \\ x + z = c \end{cases}$. Determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el vector $(2, -1, 1)$ sea solución del sistema y hallar todas las soluciones del mismo.

5. Determinar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) cuáles de las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema lineal generan otro sistema equivalente al original.

- (a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de todas las ecuaciones.
 (b) Sustituir dos ecuaciones por su suma.
 (c) Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.
 (d) Sumar $2x + 2$ al primer miembro de cada ecuación del sistema.
 (e) Intercambiar dos ecuaciones entre sí.
 (f) Sustituir una ecuación por el resultado de sumarla con otra.
 (g) Sustituir una ecuación por el resultado de restarle otra.

6. Explicar por medio de qué operaciones se puede asegurar que los siguientes pares de sistemas son equivalentes.

$$(a) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} -4x + 2y = -3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ 2x - y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases} ; \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}.$$

7. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada (¿qué se va a hacer?).

$$(a) \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases} \quad (g) \begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ x - y + z = 1 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x + 2y - z + 2t = 0 \\ x + y + z + 2t = 1 \\ -x + y - 5z - 2t = -3 \end{cases} \quad (h) \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 5x + y - z = -5 \end{cases}.$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 5y - 4z = 5 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases} \quad (i) \begin{cases} 3y - 2z + 3w = 9 \\ 2x + y + w = 5 \\ x - y + z - w = -2 \end{cases}.$$

8. Agregar una ecuación al sistema lineal S : $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$ de manera que resulte:

- (a) compatible determinado.
- (b) compatible indeterminado.
- (c) incompatible.

9. Construir:

- (a) Dos sistemas lineales distintos de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que $(-1, 2, -5)$ sea la única solución de cada sistema.
- (b) Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que tenga infinitas soluciones y $(-1, 2, -5)$ sea una de ellas.

10. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (a) Si indicamos con n la cantidad de incógnitas de un **sistema no homogéneo**, y con m la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, puede ser que ese sistema tenga o no solución en cualquiera de los siguientes casos:
 - Si vale $m < n$.
 - Si vale $m = n$.
 - Si vale $m > n$.
- (b) Si un sistema lineal tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.
- (c) La ecuación $x + y = 0$ no tiene solución.

- (d) Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde al menos uno de los a_i es no nulo, siempre tiene solución.
- (e) Si cada ecuación de un sistema lineal tiene solución, entonces todo el sistema es compatible.
- (f) Si una ecuación de un sistema lineal no tiene solución, entonces todo el sistema es incompatible.
11. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
- (a) Todo sistema homogéneo tiene, al menos, una solución.
- (b) Los sistemas homogéneos tienen, siempre, infinitas soluciones.
- (c) Si indicamos con n la cantidad de incógnitas de un **sistema homogéneo**, y con m la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, puede ser que ese sistema tenga o no solución en cualquiera de los siguientes casos:
- Si vale $m < n$.
 - Si vale $m = n$.
 - Si vale $m > n$.
12. En el estanque de un establecimiento de cría ictícola hay tres tipos de peces (indicados con I , II y III , respectivamente) que son nutridos con los alimentos A , B y C . El consumo semanal promedio de cada pez (tomado en unidades básicas) está dado por la tabla:

	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Pez Tipo I	1	1	2
Pez Tipo II	3	4	6
Pez Tipo III	2	1	5

Semanalmente se vierten en el estanque 14000 unidades del alimento A , 12000 unidades del B y 31000 unidades del C . Toda la comida es ingerida y los peces están bien alimentados. ¿Cuántos peces de cada tipo hay en el estanque?

13. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte • compatible determinado, • compatible indeterminado, • incompatible. En los primeros dos casos, determinar el conjunto de soluciones.

$$(a) \begin{cases} (k^2 - 9)x + y + kz = 0 \\ (k - 1)y + z = 0 \\ (k + 2)z = 0 \end{cases}, \quad (f) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + (k + 1)y = 3 \\ x + y + (k^2 - 5)z = k \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = k \\ x + ky + z = 1 \\ kz = 2 \end{cases}, \quad (g) \begin{cases} x + y = 1 \\ kx + k^2z = 1 \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} 6x + ky + 3z = 9 \\ kx + (3 - k)z = 3 \\ 7x + ky + (4 + k)z = 12 \end{cases}, \quad (h) \begin{cases} x - y = -1 \\ kx - 2z = 1 \\ k^2x + (k^2 - 7k + 6)z = k^2 - k - 3 \end{cases},$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (k + 2)x + ky - z = 0 \\ -x + y - 2z = -1 \end{cases}, \quad (i) \begin{cases} x + ky + 2z - w = k + 2 \\ x + ky - 2z = 2 \\ 3x + 3ky + 2z - 2w = k \end{cases}.$$

$$(e) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - y + 3z = 1 \\ 3x + 7y - 5z = k^2 \end{cases},$$

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°3: Matrices.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; calcular:

- (a) $3A - 2B + C$. (c) $A - (B - 2C)$.
(b) $A + 3(B - C)$. (d) $A - B + 2C$.

2. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, $C \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$, $D \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

- (a) $A \cdot C$. (c) $A \cdot A$. (e) $C \cdot D$. (g) $A \cdot C \cdot D$.
(b) $C \cdot A$. (d) $B \cdot C$. (f) $D \cdot C$. (h) $C \cdot D \cdot A$.

3. Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad " $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$ " no es válida para matrices.

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

- (a) A^2 . (c) $-2A^2 + B^3A$.
(b) B^3 . (d) todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifican que $3X - 2A = 5B$.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:

- (a) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
(b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

- (a) A^t , B^t y C^t .
(b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.
(c) $(A \cdot B)^t \cdot C$, $(C^t \cdot (A \cdot B))^t$, $B^t \cdot A^t \cdot C$ y $B^t \cdot (C^t \cdot A)^t$.

8. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:
- $A^2 + A^3$, A^{15} y A^{1000} .
 - A^n , para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - Repetir los cálculos anteriores para la matriz B .
9. Dada una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz B . ¿Qué cambios producen los productos en la matriz B ?
- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot B$.
 - $B \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B$.
 - $B \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
10. Dada una matriz $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar qué cambios se producen en la matriz C .
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C$,
 - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C$,
 - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \cdot C$.
11. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tales que $A \neq 0$ y $A \neq I$ (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) tales que:
- $A^2 = I$.
 - $A^2 = 0$.
 - $A^2 = A$.
 - $A \cdot B = B \cdot A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
12. Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular:
- A^{-1} , B^{-1} y C^{-1} .
 - $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.
 - $(AB)^{-1} \cdot C$; $(C^{-1} \cdot (A \cdot B))^{-1}$; $B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$ y $B^{-1} \cdot (C^{-1} \cdot A)^{-1}$.
13. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

14. Considerar el sistema lineal $S : \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

15. En cada uno de los siguientes casos, reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal $A \cdot \bar{x} = b$ y describir el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x^t = b\}$.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

16. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, según corresponda, tales que:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (c) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X.$$

$$(b) X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}. \quad (d) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5a & 2(b-3) \\ 2 & a+4 \end{pmatrix}$. Hallar

- (a) **una** matriz $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A \cdot X = X \cdot A$.
 (b) **todos** los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$.

18. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que verifican $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2}C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

19. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifican $A \cdot X = 2X + B^t$ para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°4: Geometría Lineal.

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L :
(a) $L : t(-2, 3) + (2, 2)$; $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (-2, 3)$, $P_3 = (0, 0)$, $P_4 = (12, -13)$, $P_5 = (2, -1)$.
(b) $L : t(-1, 1) + (3, -3)$; $P_1 = (3, -3)$, $P_2 = (0, 0)$, $P_3 = (-1, 1)$, $P_4 = (3, 4)$, $P_5 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
2. Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación implícita y la ecuación explícita de la recta que:
(a) pasa por $P = (-1, 2)$ con vector director $v = (3, 1)$.
(b) pasa por $P = (1, -4)$ y $Q = (-1, -3)$.
(c) que es paralela a la recta $L : t(-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por $P = (1, -4)$.
(d) que pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, -5)$ y $(\frac{1}{2}, 3)$.
(e) es perpendicular a la recta $L : t(2, 3) + (5, 7)$ y pasa por $P = (-3, 1)$.
3. Graficar y dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta de ecuación:
(a) $y = 3x - 2$. (c) $y = 4$. (e) $x = 4y - \frac{1}{2}$.
(b) $2x - 3y = 5$. (d) $x = -5$.
4. En cada uno de los siguientes casos, dar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de la recta que:
(a) está dirigida por $v = (0, 1, 0)$ y pasa por $P = (0, 2, 4)$.
(b) pasa por los puntos $P = (-2, 3, 4)$ y $Q = (-1, 3, 1)$.
(c) es paralela al eje z y pasa por $P = (1, 2, 3)$.
(d) que es paralela a la recta $L : t(2, 4, -5) + (0, 3, -1)$ y pasa por $P = (3, -1, 2)$.
(e) es perpendicular a la recta $L : t(1, -2, 1) + (3, 5, 7)$ y pasa por $P = (1, 9, -3)$. ¿Es única?
5. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por los vectores v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:
(a) $v = (0, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0)$ y $P = (0, 0, 1)$.
(b) $v = (0, 2, 0)$, $w = (1, 1, 0)$ y $P = (0, 1, 1)$.

Graficar los planos hallados en (a) y (b) y compararlos.
6. Dar las ecuaciones paramétricas de:
(a) un plano que contenga al eje z y a la recta dirigida por $v = (1, 2, 1)$ que pasa por el origen.
(b) la recta que está en la intersección del plano xz con el plano yz .
7. Dar la ecuación vectorial:
(a) de la recta que pasa por los puntos $(2, 1, 3)$ y $(3, -2, 5)$.
(b) del plano que pasa por los puntos $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$ y $(3, 2, 7)$.

- (c) del plano que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y .
- (d) del plano que es paralelo a la recta $L : t(1, 2, -4) + (1, 2, 1)$ y contiene los puntos $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (1, 2, -3)$.
8. (a) Decidir si los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 0, 1)$ y $C = (3, 0, 2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.
- (b) Decidir si los puntos $A = (8, 2, 4)$, $B = (4, 2, 8)$, $C = (-2, 0, 1)$ y $D = (1, -1, 3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.
9. Dado el plano $\pi : 2x - 5y + 3z = 11$;
- (a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2, a, 7) \in \pi$.
- (b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(0, 3a, a) \in \pi$.
10. Sea π el plano que contiene a la recta $L : t(1, -2, 1) + (1, 0, 2)$ y contiene al punto $P = (2, 2, 3)$.
- (a) Decidir si los puntos $P = (1, -2, 1)$ y $Q = (3, 3, 4)$ pertenecen o no a π .
- (b) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(a, 2a + 1, a - 3) \in \pi$.
11. Determinar, en cada uno de los siguientes casos, si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:
- (a) $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$; $L' : t(-1, 1, 2) + (1, 0, -1)$.
- (b) $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$; $L' : t(2, 2, -2) + (1, 0, -1)$.
- (c) $L : t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2)$; $L' : t(-2, -1, 2) + (3, 3, -2)$.
- (d) $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$; $L' : t(1, -2, 6) + (3, 3, -3)$.
- (e) $L : t(1, 2, -1) + (-1, -1, 2)$; $L' : t(-1, 1, 1) + (3, 2, -1)$.
12. (a) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$.
- (b) Dar una ecuación implícita del plano que contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta de ecuaciones $2x - 3y - z = 1$ y $x - y + z = 2$.
- (c) Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por $P = (2, 1, 7)$ con vectores directores $v = (1, 0, 4)$ y $w = (4, -1, 3)$.
- (d) Dar las ecuaciones paramétricas del plano $\pi : 2x - y + 3z = 1$.
13. Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por P :
- (a) $P = (1, -1, 2)$; π pasa por los puntos $(0, 2, 0)$, $(-1, 1, 2)$ y $(0, 5, 5)$.
- (b) $P = (3, 3, 3)$; π está dirigido por $v = (1, 2, 1)$ y $w = (-2, 2, -3)$ y pasa por $Q = (0, 5, 4)$.
- (c) $P = (2, 1, 0)$; $\pi : 3x - y + 2z = 4$.
- (d) P es la intersección de las rectas $L : t(1, 1, 1) + (1, 0, 1)$ y $L' : t(1, -1, 2) + (0, 3, -2)$; $\pi : y = 3$.
14. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.
- (a) $\pi_1 : 3x - 2y + 4z = 1$; π_2 está dirigido por $v = (2, 2, 0)$ y $w = (-3, 2, 1)$ y pasa por $(2, 2, 2)$.
- (b) $\pi_1 : 3x - 2y - 1 = 0$; π_2 pasa por los puntos $(3, 1, 4)$, $(0, 0, -2)$ y $(1, -1, -1)$.
- (c) $\pi_1 : 4x + 2 - 3z = 1$; $\pi_2 : 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.

- (d) π_1 pasa por $(-1, 1, 2)$ con vector normal $N = (1, 2, -1)$; π_2 pasa por $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.
15. Sea L la recta que pasa por los puntos $P = (0, k+3, 2k)$ y $Q = (k^2, -k-2, -1)$ y sea π el plano de normal $N = (1, 1, -1)$ que pasa por $A = (5, 7, 7)$. Determinar **todos** los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $L \cap \pi = \emptyset$.
16. (a) Encontrar **todos** los puntos de la recta $L : t(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2, 1, -1)$.
 (b) Hallar el punto Q de la recta $L : t(2, -1, 4)$ más próximo al punto $P = (-4, 8, 1)$.
17. Hallar las siguientes distancias:
 (a) entre la recta $L : t(1, 1) + (3, 0)$ y $P = (-1, 1)$.
 (b) entre la recta $L : t(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$ y $P = (-1, 1, 0)$.
 (c) entre el plano π que tiene vector normal $N = (1, -1, 2)$ y pasa por $(1, 2, 1)$ y el punto $P = (1, 2, 5)$.
18. Un punto se desplaza por el espacio, de modo que en el instante t su posición viene dada por el vector $x(t) = (1-t)e_1 + (2-3t)e_2 + (2t-1)e_3$; donde $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$.
 (a) Mostrar que el punto se mueve a lo largo de una recta.
 (b) Hallar el instante t en que el punto toca al plano $\pi : -2x + 3y + 2z = 0$.
 (c) Calcular, para cada valor de t , la distancia del punto al plano π .
 (d) Hallar el instante t en que el punto está más cerca del origen. Dar el punto correspondiente y la distancia.
19. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1, 2, -1)$ y pasa por $(-1, 3, 1)$. Sea L_2 la recta que pasa por $(-1, 1, 3)$ y por $(1, 2, 7)$.
 (a) Determinar si L_1 y L_2 se intersecan o no.
 (b) Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, hallar un plano que contenga a ambas rectas y dar el ángulo entre ellas.
 (c) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1, 1-3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2 .
20. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1 : x - y = 1$, $L_2 : x + y = 3$.
 (a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2 .
 (b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_2) = \angle(L_1, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.
21. Hallar las ecuaciones implícitas de la recta:
 (a) L es intersección del plano xy con el plano yz .
 (b) $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$.
 (c) L pasa por los puntos $(-5, 3, 7)$, $(2, -3, 3)$.
22. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 9 \end{cases}$ y $L_2 : t(1, 0, 2) + (1, 2, -3)$.
 (a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas y que $P = (2, 2, -1)$ pertenece a L_2 .
 (b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por P .
 (c) Hallar $Q = L_1 \cap \pi$ y $d(P, Q)$.
 (d) ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?

23. Sean $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, -1)$ y $C = (0, -2, -1)$.
- (a) Hallar la recta L que pasa por A y B .
 - (b) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por C .
 - (c) Hallar $D = L \cap \pi$ y los valores $d(A, B)$ y $d(C, D)$.
 - (d) Usando los cálculos hechos dar el área del triángulo de vértices A , B y C .
24. Sean π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$.
- (a) Probar que L es paralela a π y que $P = (2, 1, 1)$ pertenece a L .
 - (b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por P .
 - (c) Hallar $Q = L' \cap \pi$ y $d(P, Q)$.
 - (d) ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°5: Subespacios - Rango de una Matriz.

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

- (a) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.
- (b) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 0\}$.
- (c) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\}$.
- (d) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$.
- (e) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - 4x_2^2 = 0\}$.
- (f) $S \subset \mathbb{R}^5$; $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera el conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ dado por $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = a\}$. Graficar S y mostrar que S es un subespacio si y sólo si $a = 0$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Probar que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v^t = 0\}$, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

4. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y analizar si son subespacios o no:

- (a) $S = \{t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (b) $S = \{t(1, 2) + (2, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (c) $S = \{t(1, -2) + (-2, 4) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (d) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
- (e) $S = \{s(1, 2) + t(2, 4) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
- (f) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R} \text{ con } s + t = 1\}$.

5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sean v_0, v_1 y $v_2 \in \mathbb{V}$.

- (a) Probar que $S = \{t \cdot v_0 : t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
- (b) Probar que $T = \{s \cdot v_1 + t \cdot v_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
- (c) Describir geométricamente los subespacios S y T .

6. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^2$ $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$. Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de v_1 y v_2 . ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

7. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$; $v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.
- (b) $S = \langle (1, 2, 3), (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$; $v = (-5, -10, -15)$.
- (c) $S = \langle (1, -1, 2, 1), (2, 1, 3, 0) \rangle$; $v = (0, -3, 1, 1)$.

8. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ con las condiciones:

- (a) que contenga al vector $v = (1, 2, 3)$.
- (b) que contenga al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contenga al vector $w = (0, 1, 1)$.

9. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^n$ o no:

- (a) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1)\}$.
- (b) $n = 2$, $\{(-1, 1), (2, -2)\}$.
- (c) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1), (3, 4)\}$.
- (d) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$.
- (e) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$.
- (f) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$.
- (g) $n = 5$, $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1)\}$.
- (h) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$.

10. Hallar un sistema de generadores para cada uno de los siguientes subespacios
- $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$.
 - $S \subset \mathbb{R}^5$; $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.
 - $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
 - $S = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0) \rangle$.
11. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{V}$, un espacio vectorial real.
- $\{(1, -3, 5), (-2, 2, 1), (-1, -1, 6)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $(1, 2, 3, 4, 5); \mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.
 - $\{(1, 2, 2, -1), (0, 2, -2, -3), (1, 1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
 - $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{v\}$ con $v \in \mathbb{V}$; $\{v_1, v_2\}$ con $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.
 - $\{v_1, v_2, \dots, v_n, 0\}$ con $v_1, v_2, \dots, v_n, 0 \in \mathbb{V}$.
12. Hallar (si es posible) tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.
13. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en $\mathbb{V}$:
- $\{(0, -1, k), (1, -1, 2), (-1, 0, 2)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, -1, 2), (k+1, k, k+6), (k, k+1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(k-2, k, 1, 0), (0, k, 0, 0), (1, 1, 0, k-1), (2, -1, -1, k-1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
14. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores son o no base del espacio $\mathbb{V}$. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender a una base de $\mathbb{V}$.
- $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 3)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.
15. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los subespacios del ejercicio 10.
16. Sea $S = \langle (0, -1, k), (1, -1, 0), (-1, 0, 2) \rangle$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio S en función de k .
17. Para los siguientes subespacios S y T hallar una base de S , T , $S \cap T$ y $S + T$. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?
- $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$,
 $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0, x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$.
 - $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $T = \langle (1, 1, 1), (0, -2, 0) \rangle$.
 - $S = \langle (1, 1, 2), (1, -1, 0) \rangle$, $T = \langle (2, 0, -1), (-1, 0, \frac{1}{2}) \rangle$.
 - $S = \langle (1, 2, 3, -1), (0, -1, 2, 0), (2, 0, 1, 2), (-1, -2, -1, 1) \rangle$,
 $T = \langle (1, 2, 1, 3), (0, -1, 0, 2), (2, 0, 2, 1), (-1, -1, -1, -2) \rangle$.

18. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, \lambda) \rangle$:

- (a) hallar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $S \cap T \neq \{0\}$.
- (b) para cada valor λ hallado en (a), encontrar una base de $S \cap T$.

19. Para $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_2 - x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$:

- (a) Hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, a, -2, b) \in S \cap T$.
- (b) Dar dos bases distintas de $S \cap T$.
- (c) Decidir si es posible dar tres vectores linealmente independientes en el subespacio $S \cap T$.

20. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$; $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \langle (2, -1, -1, 3), (1, 1, 0, -2), (4, 1, -1, -1) \rangle$:

- (a) Hallar $\mathcal{B}_1$ una base del subespacio $S \cap T$.
- (b) Extender la base $\mathcal{B}_1$ a una base de S . Hacer lo mismo para una base de T .
- (c) Hallar $\mathcal{B}_2$ una base del subespacio $S + T$ que contenga a $\mathcal{B}_1$.
- (d) Extender $\mathcal{B}_2$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

21. Dadas las matrices $A = (1, 1, 0, 1)$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- (a) calcular la dimensión y una base del espacio fila; del espacio columna y del núcleo.
- (b) calcular el rango.
- (c) repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.

22. Para las matrices en $\mathbb{R}^{3 \times 4}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

hallar una base y la dimensión de los subespacios $N(A)$, $N(B)$, $N(A) \cap N(B)$ y $N(A) \cap N(A^t \cdot A)$.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- (a) Si $m = n = 10$ y $rg(A) = 6$; calcular $\dim(N(A))$.
- (b) Si $m = 7$, $n = 8$ y $rg(A) = 2$; calcular $\dim(N(A))$.
- (c) Si $m = 4$, $n = 5$ y $\dim(N(A)) = 3$; calcular $rg(A)$.
- (d) Si $m = 3$, $n = 5$ y $\dim(E_C(A^t)) = 3$; calcular $\dim(N(A))$.
- (e) Si $m = 3$, $n = 4$ y $\dim(E_C(A)) = 2$; calcular $\dim(N(A))$.
- (f) Si $m = n = 4$ y $\dim(E_C(A)) + \dim(E_C(A^t)) = 6$; calcular $\dim(N(A))$.

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(a) Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.

(b) Calcular los subespacios $\dim(N(A))$, $\dim(N(A^t))$, $\dim(E_F(A))$, $rg(A)$ y $rg(A^t)$

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y S el sistema $S : \begin{cases} ax + y + bz = 0 \\ 2ax - y + bz = 0 \end{cases}$.

Hallar a y b tales que el subespacio $N(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S .

26. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

27. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ una matriz tal que $rg(A) = 2$.

(a) Determinar si el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución no nula.

(b) Calcular la dimensión del espacio de soluciones del sistema $A^t \cdot x = 0$.

28. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $rg(A) = 2$.

(b) Para el valor de b hallado, analizar si $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

29. Para cada uno de los siguientes subespacios S , hallar $m, n \in \mathbb{N}$; y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que $N(A) = S$.

(a) $S = \langle (1, 3) \rangle$.

(c) $S = \langle (1, 3, 1), (-2, 1, 0), (-1, 4, 1) \rangle$.

(b) $S = \langle (1, 3, 1), (-2, 1, 0) \rangle$.

(d) $S = \langle (1, 3, 1, -2), (-2, 1, 0, 3), (-1, 4, 1, 1), (3, 2, 1, -5) \rangle$.

30. Para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\}$:

(a) Hallar la dimensión y una base $\mathcal{B}$ de $S \cap T$.

(b) Dar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^4$ que no sean combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

(c) Hallar $m, n \in \mathbb{N}$; y $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dos matrices distintas tales que $A \cdot v^t = B \cdot v^t = 0$ para todo $v \in S \cap T$.

31. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son dos matrices

tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$.

Calcular $rg(A \cdot B \cdot A)$, $\dim(N(A \cdot B \cdot A))$ y hallar una base de $N(A \cdot B \cdot A)$.

32. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle (2, 3, -1), (-2, 1, 5), (4, 2, -6) \rangle$:

(a) Probar que $T \subset S$.

(b) Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T = S$ o no.

33. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha + 2)x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + (\alpha^2 - 7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2 - 11)x_2 + (2\alpha + 7)x_3 + 2x_4 = 0\}$

(a) Calcular $\dim(S \cap T)$ en términos del valor α .

(b) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 1$, hallar una base de $S \cap T$.

(c) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 2$, hallar una base de $S + T$.

34. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & (k+2) & (k+3) \\ -1 & (k^2-7) & -1 & (-2k-6) \\ 1 & (k^2-11) & (2k+7) & (k-9) \end{pmatrix}$.

- (a) Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\dim(N(A)) = \dim(E_F(A^t))$.
- (b) Para cada k hallado, calcular una base de $N(A)$ y una base de $N(A^t)$.

35. Sean S y T subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 4$.

- (a) Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
 - (i) $S \subset T$. (ii) $\dim(S+T) = 7$. (iii) $\dim(S \cap T) = 4$. (iv) $S \cap T = \emptyset$.
- (b) Si $\dim(S \cap T) = 3$, ¿qué puede decirse de S y T ?
- (c) Si $\dim(S+T) = 4$, ¿qué puede decirse de S y T ?
- (d) Si $S \subset T$, calcular $\dim(S+T)$ y $\dim(S \cap T)$.

36. Sean $P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ y $Q \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ tales que $\text{rg}(P) + \dim(N(Q)) = 6$ y $\dim(E_F(P^t)) = 5$.

- (a) Calcular $\dim(N(P))$, $\text{rg}(P)$, $\dim(N(Q))$ y $\text{rg}(Q)$.
- (b) Calcular $\dim(E_C(Q^t \cdot P^{-1}))$.
- (c) Calcular $\dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$, si $W \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ es una matriz tal que $\dim(N(W)) = 3$.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°6: Determinantes.

1. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, (e) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Para cada una de las siguientes matrices, hallar su determinante usando propiedades y realizando la menor cantidad de cálculos posibles.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -10 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & 4 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(e) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (g) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A) = 0$, para cada una de las siguientes matrices A :

$$(a) \begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} k-1 & k+4 \\ k-2 & k+1 \end{pmatrix}, (e) \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 2 \\ k & k^2-k & k^2 \\ 3k & k-1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} k-6 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 4 & k-4 \end{pmatrix},$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det(A) = 5$, calcular los determinantes de las matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, (e) \begin{pmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix},$$

6. Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible en cada uno de las siguientes casos:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{(f)} \quad & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ k & k+3 & 1 \\ k+2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(g)} \quad \begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 0 \\ k & 3-k & -2 & 4 \\ -k & k-3 & 3-k^2 & 4k \\ k & k+1 & k^2-1 & 4+2k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $\det(A) = 2$. Calcular:

- (a) $\det(A^3)$.
- (b) $\det(A^{-3})$.
- (c) $\det(-2 \cdot A^3)$.
- (d) $\det((-2 \cdot A)^3)$.
- (e) $\det(-2 \cdot A^{-3})$.
- (f) $\det((-2 \cdot A)^{-3})$.
- (g) $\det(B \cdot A \cdot B^{-1})$; ($B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ inversible).

8. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tales que $\det(A) = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

- (a) $\det(A + A \cdot B)$.
- (b) $\det(A^{-1} + A^{-1} \cdot B)$.
- (c) $\det(-2A + A \cdot 5B)$.
- (d) $\det((-2A^{-1} + A^{-1} \cdot 5B))$.

9. Sea $B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ una matriz inversible y sea $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ una matriz que verifica: $\det(A) = 16$ y $A \cdot B = \det(B) \cdot I$. Hallar $\det(B)$.

10. Sean $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. Determinar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es inversible, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4-a & 3 & a^2-4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Considerar el sistema lineal S :
$$\begin{cases} -x + \alpha y + z &= \alpha \\ -x + (1 - \alpha)z &= 1 \\ -x + y + z &= \alpha^2 \end{cases}.$$

- (a) Usando determinantes, clasificar el sistema en términos del valor α .
- (b) Sea A la matriz asociada a S . Si $\alpha = 200$, probar que A es inversible y hallar $\det(A^{-1})$.

12. Sean $M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha & 2 \\ 2\alpha+2 & \alpha+1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Sea $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ inversible tal que $B \cdot b = c$ y sea $A = B^{-1} \cdot M$.

- (a) Clasificar el sistema $A \cdot x = b$ en términos del valor α .
- (b) Para los valores de α tales que el sistema es compatible indeterminado, hallar el conjunto de soluciones de $A \cdot x = b$.

13. Hallar **todos** los $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ tales que $(B \cdot A) \cdot x = 2B \cdot x$ sabiendo que $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con $\det(B) = 5$ y $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Rehacer, usando determinantes, el ejercicio 13 de la Práctica 2, para aquellos sistemas cuya matriz asociada sea cuadrada.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°7: Diagonalización.

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (e) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(f) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}, (g) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (h) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (i) \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Analizar si cada una de las siguientes matrices A , es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que la diagonalice.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (e) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}, (g) \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, (i) \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, (d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (h) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, (j) \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Probar que A es diagonalizable y hallar una base de $\mathbb{R}^2$ de autovectores de A .
- (b) Hallar una matriz inversible C que diagonalice a A .
- (c) Calcular A^{10} .

4. Mostrar que las siguientes matrices A y B no son diagonalizables cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Probar que:

- (a) si $(a - d)^2 + 4bc > 0$ entonces A es diagonalizable.
- (b) si $(a - d)^2 + 4bc < 0$ entonces A **no** es diagonalizable.
- (c) ¿qué puede decirse si $(a - d)^2 + 4bc = 0$?

6. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que:

- (a) $\lambda = 1$ es autovalor de A . Para cada k hallado, dar una base del autoespacio $S_1(A)$.
- (b) $\lambda = 2$ es autovalor de B . Para cada k hallado, dar una base del autoespacio $S_2(B)$.

7. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

Hallar los autovalores y autovectores asociados de: (a) A , (b) A^3 , (c) A^9 .

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y sea $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
- (b) Probar que A es diagonalizable y hallar C inversible que diagonalice a A .
- (c) Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A .
- (d) Escribir al vector v como combinación lineal de la base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A .
- (e) Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A .

9. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
- (b) Probar que A **no** es diagonalizable.
- (c) Escribir al vector v como combinación lineal de los autovectores de A .
- (d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- (a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A .
- (b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

11. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A resulta **no** diagonalizable para las siguientes matrices:

$$(a) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) A = \begin{pmatrix} (2a+4) & (1-a) & (-2a-a^2) \\ 0 & (4-a) & 0 \\ 0 & 0 & (4-a^2) \end{pmatrix}.$$

12. Sea $A = \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 & 0 \\ b^3 - b & a^2 - 1 & 0 \\ b^2 - 1 & b^2 - b & a^3 - a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- (a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene autovalor triple.
- (b) Para cada a hallado, dar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que A es diagonalizable.

13. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Decidir si A es o no diagonalizable y determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $(2a + 6; a^2 - 4, 2)$ es autovector de A .
14. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.
- (a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.
- (b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2 + 1, 2)$ es autovector de A .
15. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Se sabe que $v = (1, 2, 0)$, $w = (2, 6, 0)$ y $u = (-2, -2, -1)$ son autovectores de A .
- (a) Calcular los autovalores de A .
- (b) Analizar si A es o **no** diagonalizable.
- (c) Calcular r, s y t .
16. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1, 1, 1) \in N(I - A)$.
- (a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A .
- (b) Dar una base de los autoespacios correspondientes a los autovalores. ¿Es A diagonalizable?
17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz con autovalores $\{-1, 1, 2\}$.
- (a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.
- (b) Mostrar que $B = A^2 + 3A - I$ es diagonalizable.
18. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.
- (a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.
- (b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.
- (c) Probar que $H = A + I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1} . ¿Es H diagonalizable?
- (d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.
19. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k^3 & 0 \\ k & 2 & k^2 & 0 & k^4 \\ 0 & k^2 & 3 & k^5 & -k \\ k^3 & 0 & k^5 & 4 & k^2 \\ 0 & k^4 & -k & k^2 & 5 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.
20. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz **diagonalizable** tal que $\lambda = \frac{1}{2}$ es raíz de χ_A de multiplicidad 3. Sean B y C las matrices: $B = 2A + 3I$, $C = (A - I)^3$.
- (a) Determinar si A es o no inversible.
- (b) Calcular $\det(B)$ y $\text{tr}(B)$; $\det(C)$ y $\text{tr}(C)$.

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de χ_A . Sean B y C las matrices:
 $B = 5A^2 + 3A - 2I$, $C = 4A^2 + \alpha I$.

- (a) Mostrar que A es inversible y calcular $\det(A^{-1})$ y $\text{tr}(A^{-1})$.
- (b) Calcular $\det(B)$ y $\text{tr}(B)$.
- (c) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales C no es inversible.

22. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A , $\text{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

- (a) Hallar **todos** los autovalores de A .
- (b) Decidir si A^t es o no diagonalizable.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$, $\text{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

- (a) Calcular los autovalores de A .
- (b) Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz inversible tal que $\text{tr}(A) = -2$, $\text{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $\chi_A(1) = 8$. Probar que A es diagonalizable. Justificar con claridad.

25. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

- (a) Calcular $\det(A)$ y $\text{tr}(A)$.
- (b) Probar que $A^4 - 7A^3 + 17A^2 - 17A + 6I = 0$.

26. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

- (a) Probar que $A^3 - 4A^2 + 10A = 15I$.
- (b) Probar que $A^3 - 4A^2 + 6A - 12I = -4A + 3I$.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°8: Aproximación por cuadrados mínimos

1. Hallar y graficar las rectas que mejor aproximan en el sentido de los cuadrados mínimos a los siguientes conjuntos de puntos:

(a) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$ y $(4, 3)$.

(b) $(1, 0)$, $(3, 2)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$ y $(7, 7)$.

2. Encontrar el polinomio de grado 2 que aproxima en el sentido de cuadrados mínimos la tabla:

x	0.1	0.3	0.5	0.7
y	1.3	2	2.7	3.5

3. Ajustar la siguiente tabla de datos mediante una función exponencial de la forma $y = k \cdot a^x$:

x	0	1	2	3	4
y	2	3	6	9	15

4. La siguiente tabla tiene la altura y el peso de 6 hombres entre 25 y 29 años de edad:

Altura (metros)	1.83	1.73	1.68	1.88	1.63	1.78
Peso (kilogramos)	79	69	70	81	63	73

- (a) Ajustar linealmente estos datos.
- (b) Estimar el peso de un hombre de 27 años, de 1.75 m de altura.
- (c) Estimar la altura de una persona de 28 años y de 68 kg. de peso.
5. En un cultivo se mide la cantidad de bacterias por unidad de volumen cada hora, obteniendo la siguiente tabla de datos:

Horas	0	1	2	3	4	5	6
Bacterias	32	47	65	92	132	190	275

- (a) Ajustar estos datos con una función exponencial.
- (b) Estimar, según la aproximación hecha, el número de bacterias en la décima hora de la medición.
6. El porcentaje de mortalidad de ciertos ácaros expuestos a una temperatura menor que 0°C durante cierto número de días está descrito en la siguiente tabla:

Días	1	3	8	13	16
Porcentaje	0.8	3.6	11.6	22.6	30

Ajustar estos datos con un polinomio de segundo grado.

7. La siguiente tabla muestra la altura promedio de una plantación de girasoles en relación con las semanas de crecimiento. Ajustar los datos con una función cúbica (polinomio de grado 3):

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (metros)	0.18	0.36	0.68	0.99	1.31	1.70	2.06	2.28

8. Para la siguiente tabla de datos se ha propuesto el modelo $y = \frac{10}{ax+b}$ donde a y b son valores desconocidos. Empleando un apropiado cambio de variable y el método de cuadrados mínimos, estimar esos valores. (Sugerencia: considerar el cambio de variable $z = \frac{10}{y}$).

x	0	1	2	3	4
y	9.9	3.4	2	1.43	1.1

9. Para el modelo $y = \frac{x^2+1}{ax+b}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, calcular la mejor aproximación a este modelo en el sentido de los cuadrados mínimos, a partir de los siguientes datos:

x	0	1	2	3
y	0.6	0.5	1	1.5

10. Se sabe que la siguiente tabla de datos corresponde con una muestra que verifica una relación de la forma $ax + 3y + bz = 0$. Plantear un modelo conveniente que permita determinar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ por el método de los cuadrados mínimos:

x	-2	0	0.5	1
y	1	0.9	0.1	-1
z	1	0	0.5	1

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (CS. BIOLÓGICAS)

Práctica N°9: Matrices estocásticas - Procesos de Markov

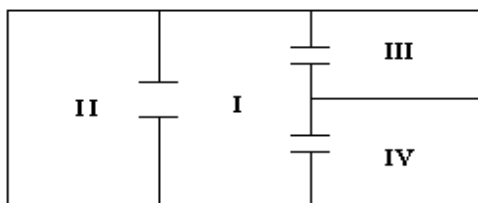
1. Determinar cuáles de las siguientes matrices son estocásticas o de Markov.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0.2 \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0.5 \\ -\frac{1}{2} & 0.5 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0.5 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Un país, cuya población es constante está dividido en dos regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región A se traslada a la región B mientras que 1 de cada 5 habitantes de la zona B se muda a la región A . En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región A y 30 millones en la B .

- (a) Escribir la matriz de transición para este proceso.
 (b) Calcular el estado de la población dentro de 10 años.
 (c) Lo mismo pero dentro de 30 años.

3. En el instante inicial 21 ratones se encuentran en la casilla I (ver diagrama). Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de las casillas adyacentes o se quede en la casilla en la que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el nuevo estado.



- (a) Determinar la matriz de transición del proceso.
 (b) Determinar el vector de estado después de 4 horas.
 (c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio y justificar la respuesta.
4. En una población animal tenemos una epizootia que en este momento afecta al 30% de los animales. El resto está sano pero puede enfermarse. Los especímenes que se curan adquieren inmunidad. La progresión de la epizootia se atiene a la siguientes reglas:
- Cada semana un 15% de los sanos no inmunes se enferman;
 - En el mismo lapso, un 10% de los animales enfermos se cura.
- (a) Dar la matriz de transición del proceso y determinar el estado inicial.
 (b) Dar el estado del proceso después de 5 semanas de iniciado.
 (c) Determinar si existe un estado de equilibrio.

5. Un proceso de Markov admite 3 estadios o sectores: α, β y γ . La probabilidad de pasar del estadio α a cada uno de los otros sectores es $\frac{1}{2}$. Un individuo que está en el estadio β tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ de pasar al α y lo mismo sucede para transitar del β al γ . Los individuos en el estadio γ tienen probabilidad 1 de pasar al α en el período siguiente.
 - (a) Armar la matriz estocástica A de transición de este proceso.
 - (b) Si el estado actual del proceso está dado por $V^t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, determinar el estado siguiente.
 - (c) Analizar el comportamiento de A^n para valores de n grandes.
 - (d) Decidir si existe un estado límite.
6. Se observa la alimentación de una determinada especie de insectos en un ecosistema. En la actualidad la mitad de los insectos come una gramínea baja, el 30% una variedad de gramínea alta y el restante 20% se alimenta de las hojas de cierto tipo de árbol. Sin embargo, las preferencias alimentarias cambian año a año. Se ha determinado que un 25% de los insectos que comen gramínea baja cambiarán el próximo año a hojas de árbol y un 20% a gramínea alta. Entre los que se alimentan de gramínea alta un 50% pasará a gramínea baja. Un 40% de los que se alimentan con hojas de árboles pasarán a comer gramínea baja y el resto seguirá con las hojas de árboles.
 - (a) Formar la matriz de transición de este proceso.
 - (b) Dar el vector de estado a los 3 años
 - (c) ¿Existe un estado de equilibrio?
7. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. Esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75% de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.
 - (a) Determinar la matriz y el estado inicial que rigen el proceso.
 - (b) Calcular los 5 primeros estados del proceso de Markov.
 - (c) Verificar que el vector $V^t = (\frac{2}{17}, \frac{15}{17})$ es estado de equilibrio.
8. Sea $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ la matriz de transición de un proceso de Markov y sea $V(2)^t = (\frac{1}{18}, \frac{11}{18})$ el segundo estado. Calcular $V(0)$ y $V(1)$.
9. Se tiene un proceso de Markov cuya matriz de transición es $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$. Verificar que el vector $V^t = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ es un estado de equilibrio del proceso.
10. Sea $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$M = \begin{pmatrix} a & a + \frac{1}{10} & b + \frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b + \frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$
 - (a) Determinar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales M resulta ser una matriz de Markov.
 - (b) Para los valores de a y b hallados, decidir si hay dos vectores de equilibrio de M que sean linealmente independientes. En caso afirmativo, hallarlos. Si no, justificar adecuadamente.
 - (c) Para los valores a y b hallados, verificar que M^t es también una matriz de Markov. ¿Es casualidad o una ley general?

11. Se tiene una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que define un proceso de Markov de la que se sabe que:
- $a_{13} = a_{31} = 0$ y $a_{22} = \frac{2}{7}$, • $\text{tr}(A) = \frac{25}{10}$ y • $(0, 2, 3)$ es un estado de equilibrio del proceso.
- (a) Determinar todos los valores de la matriz A .
 - (b) Decidir si hay dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes.
 - (c) Si $V(0) = (1, 3, 2)^t$ es el vector inicial, decidir si el proceso tiene estado límite. En caso afirmativo, encontrarlo.
 - (d) Determinar si existe A_∞ y en tal caso, hallarla.
12. Sea $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz que define un proceso de Markov de la que se sabe que:
- $m_{12} = m_{13} = 0$ y $m_{22} + m_{23} = \frac{9}{10}$, • $\text{tr}(M) = \frac{5}{2}$ y • $\det(M) = \frac{1}{2}$.
- (a) Hallar todos los autovalores de M .
 - (b) Sabiendo que el vector $(1, 2, 3)$ resulta estado límite del proceso para cierto vector de estado inicial, hallar la matriz M .
 - (c) Decidir si hay dos vectores linealmente independientes que sean estados de equilibrio de M .
 - (d) Determinar si existe M_∞ . Justificar.
13. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en tres sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100% de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100% de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 1, mientras que la población del Sector 3 permanece (sin desplazarse) en su sector. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.
- (a) Determinar la matriz de transición A que describe el proceso.
 - (b) Decidir si hay dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes.
 - (c) Determinar si el proceso tienen un estado límite con una población inicial de 200 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3. En caso afirmativo, hallarlo. En caso negativo, justificar.
 - (d) Idem ítem anterior para una población inicial de 100 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.
 - (e) Determinar si existe A_∞ . Justificar.
14. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en cuatro sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100% de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100% de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 3, el 100% de la población del Sector 3 se ha desplaza al Sector 4 y el 100% de la población del Sector 4 se ha desplaza al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.
- (a) Determinar la matriz de transición A que describe el proceso.
 - (b) Decidir si hay dos vectores de estado de equilibrio de A que sean linealmente independientes.
 - (c) Determinar si el proceso tienen un estado límite con una población inicial de 100 habitantes en cada Sector. En caso afirmativo, hallarlo.
 - (d) Idem ítem anterior para una población inicial de 100 habitantes en el Sector 1, 300 en el Sector 2, 100 en el Sector 3 y 300 en el Sector 4.
 - (e) Decidir si existe A_∞ (Sugerencia: calcular A^4).