ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Primer cuatrimestre 2008

Ejercicios adicionales - Primera parte

Determinar (con justificaciones claras o contraejemplos) la validez of falsedad de las siguientes afirmaciones.

1. *a*) Dado $u \in \mathbb{R}^2$, existe un único $v \in \mathbb{R}^2$ de norma 1 tal que u y v son perpendiculares.
   b) Sean u y $v \in \mathbb{R}^2$ perpendiculares, con $\|u\| = \|v\| = 1$. Entonces $u+v$ es perpendicular a $u-v$.
2. Dados u y v no nulos en $\mathbb{R}^3$ tales que $u \neq \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de todos los $w \in \mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a u y v **simultáneamente** es una recta.
3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $Ax = b$ tiene solución única. Si $Ay = Az$ entonces $y = z$.
4. Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que B es inversible:
   a) si el sistema $B.A.x = 0$ es compatible indeterminado, entonces $A.x = 0$ es compatible indeterminado.
   b) si el sistema $B.A.x = 0$ es compatible determinado, entonces $A.x = b$ es compatible determinado para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
   c) si el sistema $B.A.x = b$ es incompatible, entonces $A.x = b$ es incompatible.
   d) si el sistema $A.B.x = b$ es incompatible, entonces $A.x = b$ es incompatible.
5. Si $AB = 0$ con $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.
6. *a*) Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ es no nula entonces existe $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ tal que AB es inversible.
   b) Si $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ es no nula entonces existe $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ tal que BA es inversible.
7. Si $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ no es la matriz nula y $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, entonces el sistema $AB \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ es incompatible.
8. Dados tres puntos distintos en $\mathbb{R}^{3\times 3}$, siempre existe un **único** plano que los contiene.
9. Sean π_1, π_2 y π_3 planos en $\mathbb{R}^3$ tales que $\pi_2 \cap \pi_3 = L_1$, $\pi_1 \cap \pi_3 = L_2$ y $\pi_1 \cap \pi_2 = L_3$ con L_1, L_2 y L_3 tres rectas distintas. Entonces la intersección de los tres planos $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ es un punto.
10. *a*) Si v_1, v_2, v_3 son vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $v_3 \in < v_1, v_2 >$, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente dependiente.
    b) Si v_1, v_2, v_3 son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$ tales que $v_3 \notin < v_1, v_2 >$, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.
11. *a*) Si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces $S \cap T \neq \{0\}$.
    b) Si S, T y W son subespacios de $\mathbb{R}^4$ tales que $\dim S = \dim T = \dim W = 2$ y $S \cap T = \{0\}$, entonces $S \cap W \neq \{0\}$ o $T \cap W \neq \{0\}$.
12. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y B es inversible, entonces $N(A.B) = N(A)$.
13. Si $A \in \mathbb{R}^{13\times 15}$, entonces $15 + \dim(N(A^t)) = 13 + \dim(N(A))$.
14. Si A y B son matrices en $\mathbb{R}^{5\times 5}$ tales que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$, entonces existe $x_0 \neq 0$ tal que $A.x_0 = 0$ y $B.x_0 = 0$ **simultáneamente**.