ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

Práctica 2

1^{er} Cuatrimestre 2003

Ejercicio 1 Probar que para cualquier matriz A de $n \times n$, y cualquier norma matricial $\|\cdot\|$, la condición de A ($cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$) mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima. (*Sugerencia: verifique que*

$$\frac{1}{cond(A)} \leq \inf \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular} \right\}$$

En realidad vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada)

Ejercicio 2 Usando el ejercicio 1 estime la condición en norma infinito de la siguiente matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule ahora explícitamente la condición en norma infinito (usando la definición), y compare.

Ejercicio 3 Sea D_n la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante y la condición de D_n . ¿Cuál es la menor distancia posible a las matrices singulares?

Para n grande, el determinante de D_n es prácticamente cero... ¿Significa esto que la matriz D_n es 'casi-singular'? ¿ D_n está mal condicionada?

Ejercicio 4 Sea x la solución exacta al sistema $Ax = b$ y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente, llamamos "vector residual" a $r = b - A\tilde{x}$ si $e = x - \tilde{x}$ notar que $Ae = r$. Demuestre que:

$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Ejercicio 5 Sea A_n la matriz de 2×2 definida:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

Hallar la inversa y la condición de A_n . Sea $n = 100$, y sea $b = (1, 2 - \frac{1}{n^2})$.

Resolver $A_{100} x_t = b$ en forma exacta. Sea x_c dado por $x_c = (1, 0)$. Hallar $r = A_{100} x_c - b$ y verificar la cota de error

$$\|x_c - x_t\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|r\|_\infty$$

Ejercicio 6 Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

La matriz A^{-1} está entonces dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la condición de A , $\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Sea x_t la solución de $Ax = b$, con $b = \{23, 32, 33, 31\}$, y sea x_c la solución de $Ax = \hat{b}$, con $\hat{b} = \{23.1, 31.9, 32.9, 31.1\}$.

Estimar el error relativo $\frac{\|x_c - x_t\|_\infty}{\|x_t\|_\infty}$.

Ejercicio 7 ¿Cuántas multiplicaciones deben realizarse para calcular el producto de dos matrices de $n \times n$? ¿Cuántas para calcular el producto Lx donde L es una matriz triangular inferior de $n \times n$, y x es un vector columna de $n \times 1$? (no contar los productos por cero).

Ejercicio 8 Estime cuántas operaciones necesita para calcular el determinante de una matriz de $n \times n$ desarrollándolo por filas o columnas.

Ejercicio 9 Escribir un programa para resolver $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ usando eliminación de Gauss sin pivoteo. Utilizarlo para calcular la inversa de A : ¿Cuál es la ventaja de haber calculado la descomposición LU de A ? Calcular el determinante de A , minimizando el riesgo de overflow o underflow.

Ejercicio 10 Utilizar el programa anterior para calcular las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10^{-n}x + 1.0y &= 1.0 \\ 1.0x + 1.0y &= 2.0 \end{aligned}$$

Determinar para qué valores de n las soluciones difieren mucho de la solución exacta. Realizar el mismo análisis utilizando el comando `\` de Matlab, que emplea estrategias de pivoteo más refinadas. ¿A qué se deben las diferencias observadas?

Ejercicio 11 Obtener la descomposición LU de una matriz A en el caso que A sea tridiagonal.

Ejercicio 12 Escribir un programa que resuelva el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde A es una matriz tridiagonal. ¿Cuántas operaciones requiere? Piense si debe almacenar todos los elementos nulos de A . Utilice el comando **flops** de Matlab, para comparar con la eficiencia del comando `\`.

Ejercicio 13 Considere el algoritmo de eliminación Gaussiana sin pivoteo aplicado a un sistema $Ax = b$ con una matriz tridiagonal. Demuestre que si la matriz es además estrictamente diagonal dominante, es posible encontrar la solución sin encontrar ningún pivote nulo. (Ayuda: Demuestre que si A es estrictamente diagonal dominante, entonces luego de hacer cada etapa de la eliminación la matriz resultante también lo es.)

Ejercicio 14 Probar que la matriz no singular:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene una descomposición LU , mientras que la matriz singular $A + I$ sí la tiene. Dar la matriz de permutaciones P tal que PA tenga una factorización LU .

Ejercicio 15 Utilice el Teorema de Cholesky para demostrar que las siguientes propiedades de una matriz simétrica son equivalentes:

- A es definida positiva
- hay un conjunto de vectores linealmente independientes $x^1, x^2, \dots, x^n$ de $\mathbb{R}^n$, tales que $a_{ij} = (x^i)^t x^j$.

Ejercicio 16 Las matrices de Hilbert H_n , pertenecientes a $\mathbb{R}^{n \times n}$ definidas según $h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$, son un ejemplo de matrices mal condicionadas (ver ej. 12). Se pueden obtener mediante el comando **hilb**(n) de Matlab (donde n es la dimensión de la matriz). Por tal motivo se las utiliza habitualmente para testear rutinas numéricas. Adaptar su programa (ejercicio 9) para que calcule la inversa de la matriz de Hilbert H_4 , y comparar con el resultado obtenido con **inv**. Verifique su resultado calculando los productos $H_4 H_4^{-1}$, $H_4^{-1} H_4$.

Ejercicio 17 Las matrices de Hilbert del problema 16 son simétricas y definidas positivas. Hallar la descomposición de Cholesky de la matriz de Hilbert H_4 . Utilizar esta descomposición para calcular H^{-1} , y comparar con los resultados del problema 16.

Ejercicio 18 Considerar el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que la eliminación de Gauss crea elementos no nulos en lugares donde inicialmente había ceros (utilice el comando `spy(A)`). Es decir, produce una matriz densa, a pesar de partir de una matriz rala. En muchas aplicaciones, uno debe resolver un sistema de ecuaciones lineales del orden de 10000×10000 donde hay a lo sumo 5 elementos no nulos por fila. Es decir, hay del orden de 50000 elementos no nulos en la matriz, cifra bastante inferior a la de elementos de la matriz. Calcular qué cantidad de bytes ocuparía una matriz densa de esas dimensiones. ¿Comprende cuál es el interés en métodos de resolución de matrices ralas que no involucren un llenado excesivo?

Ejercicio 19 a) Analizar para qué valores de n la eliminación gaussiana sin pivoteo usando aritmética de punto flotante de 3 dígitos produce resultados que difieren significativamente de la solución real (error relativo en $\| \cdot \|_{\infty} > 0.3$) para el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-n}x + 1.0y &= 3.0 \\ 1.0x + 1.0y &= 2.0 \end{aligned}$$

b) ¿Como resolvería este problema?