

ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

Práctica 3

1^{er} Cuatrimestre 2003

Ejercicio 1 Escribir un programa que implemente los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. Asegúrese de incluir una restricción al número de iteraciones.

Ejercicio 2 Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

mediante los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. ¿Son convergentes ambos métodos? ¿Cuál converge más rápido? ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿y simétrica y definida positiva?

Ejercicio 3 Resolver el sistema siguiente por los métodos de Gauss-Seidel y de Jacobi:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

¿Son convergentes ambos métodos? ¿Cuál converge más rápido? ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿y simétrica y definida positiva?

Ejercicio 4 ¿Conoce ejemplos donde converja el método de Jacobi, y no lo haga Gauss-Seidel? ¿Y al revés?

Ejercicio 5 Resolver por el método de Gauss-Seidel el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

Comience a iterar por ejemplo con $(1, 1)$. Interpretar los resultados. Gráfíquelos. Rehaga su análisis para el método de Jacobi.

Ejercicio 6 Utilice la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $A_n x = b$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

$b = (1, 2 - \frac{1}{n^2})$, $n = 100$. ¿Cómo es la convergencia? Interprete sus resultados. La lentitud de la convergencia ¿tiene que ver con el mal condicionamiento de A ? Si su respuesta es no, busque un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

Ejercicio 7 ¿Cuántas multiplicaciones y divisiones se requieren para realizar una iteración del método de Gauss-Seidel? ¿Y para Jacobi? ¿Cuántas iteraciones podrían realizarse para cada uno de los métodos antes de igualar la cantidad de operaciones del método de eliminación de Gauss?

Ejercicio 8 Estime cuántas iteraciones necesita para reducir el error del método de Jacobi en más de 10^{-m} . A partir de sus resultados ¿Qué condición debe satisfacerse para que el método de Jacobi resulte competitivo con la eliminación Gaussiana?

Ejercicio 9 Considere el problema de punto fijo $x = Mx + c$ demostrar que si $\exists s \in N$ tal que $\|M^s\| < 1$ entonces: $x_{n+1} = Mx_n + c \longrightarrow x$

Ejercicio 10 Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

i) Probar que A es convergente (es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$) si y sólo si $|a| < \sqrt{2}/2$.

ii) Sea $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$B = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ c & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

Dé condiciones necesarias y suficientes para convergencia del método de Jacobi aplicado a la resolución de $Bx = d$.

iii) Dé condiciones necesarias y suficientes para convergencia del método de Gauss-Seidel aplicado a la resolución de $Bx = d$.

iv) Concluya que Jacobi converge $\Leftrightarrow$ Gauss-Seidel converge. ¿Cuál converge más rápido?

Ejercicio 11 Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verifique sin embargo que la matriz no es diagonal dominante. ¿Cuánto valen las normas 1, ∞ , 2 de la matriz de iteración?

Ejercicio 12 i) Probar que si A tiene una base de autovectores v_i , con autovalores λ_i , la matriz

$$B = I + sA \quad s \in \mathbb{R}$$

tiene los mismos autovectores, con autovalores $\nu_i = 1 + s\lambda_i$.

ii) Sabiendo que los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_j = -4 \sin \frac{\pi j}{2n}$, $j = 1, \dots, n-1$, decidir si el método de Jacobi aplicado a $Ax = b$ es convergente o no. En caso de ser convergente, estime cuántos pasos deben realizarse para reducir el error inicial en un factor 10^{-m} .

Comentario: Este problema es interesante en las aplicaciones, pues corresponde a la discretización de la ecuación de Poisson en una dimensión espacial:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

Ejercicio 13 Consideramos la descomposición $A = D + L + U$, siendo D diagonal, L triangular inferior estricta y U triangular superior estricta.

a) Pruebe que resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver

$$\left(D + \frac{1}{2}L\right)x = -\left(\frac{1}{2}L + U\right)x + b$$

b) Consider el método de punto fijo

$$x_{n+1} = Bx_n + c$$

donde $B = -\left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}L + U\right)$ y $c = \left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1} b$.

Demuestre que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de la matriz B **si y sólo si** λ es raíz de la ecuación

$$\det \left(\frac{1}{2}L + U + \lambda \left(D + \frac{1}{2}L \right) \right) = 0$$

c) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que el método anterior converge si y sólo si $a^2 < 1/2$.

d) Verifique que el método de **Gauss-Seidel** satisface la misma condición del ítem anterior sobre el parámetro a . ¿Cuál de los dos métodos elegiría?.